

Piotr Jankowski, Andrzej Piłat

Akademia Morska w Gdyni

Joanna Wołoszyn

Politechnika Gdańska

WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYK WYJŚCIOWYCH CZUJNIKA OPTYCZNEGO METODĄ APROKSYMACJI ŚREDNIOKWADRATOWEJ

W artykule przedstawiono sposób wyznaczania charakterystyki wyjściowej optycznego czujnika przemieszczenia prostoliniowego z wykorzystaniem aproksymacji średniokwadratowej. Procedurę do aproksymacji zbioru punktów zbudowano w środowisku Mathcad, opierając się na ortogonalnych funkcjach Grama. Zaprezentowano wyniki badań symulacyjnych określających funkcje aproksymujące dla znanej funkcji analitycznej z zadanymi losowo zakłóceniami. Na tej podstawie przeprowadzono dyskusję na temat najkorzystniejszej liczby punktów pomiarowych.

WPROWADZENIE

Bardzo często w technice istnieje konieczność zidentyfikowania wyznaczonej funkcji na podstawie danych pomiarowych. Aproksymacja, dzięki swoim filtrującym właściwościom, jest jednym z ważniejszych procesów obróbki danych wykonywanych przez inżyniera. W praktyce inżynier nie zna prawdziwej szukanej funkcji teoretycznej i musi dokonać oceny, czy funkcja uzyskana w wyniku aproksymacji w stopniu dostatecznym przybliży funkcję teoretyczną, najczęściej na podstawie błędu średniokwadratowego określonego zależnością:

$$\Delta st_n := \sqrt{\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^n (y_i - gL(x_i))^2}, \quad (1)$$

gdzie:

y_i – zbiór wartości punktów pomiarowych,

$gL(x_i)$ – wartości funkcji aproksymującej w wybranych węzłach.

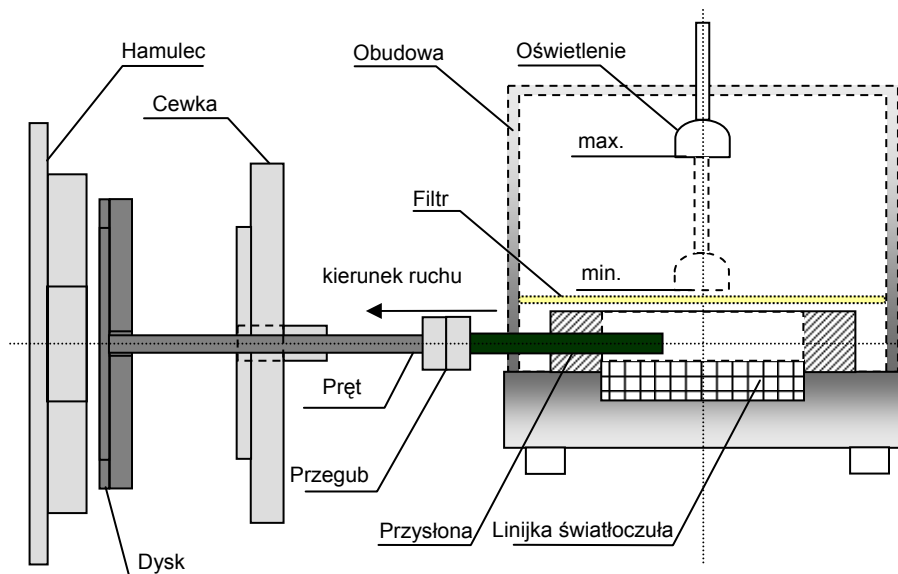
Wśród decyzji, jakie należy podjąć, przeprowadzając aproksymację zbioru punktów pomiarowych, jako najistotniejsze wymienia się: wybór rodzaju aproksymacji w zależności od definicji miary odchylenia, rodzaj funkcji bazowych zastosowanych w wielomianie uogólnionym oraz stopień zastosowanego wielomianu. Innym istotnym problemem, który musi rozwiązać inżynier, jest podjęcie

decyzji o liczbie punktów pomiarowych, jakie powinien uzyskać w celu otrzymania najlepszej aproksymacji. Jest to ważne zwłaszcza przy wyznaczaniu charakterystyk statycznych w układach pomiarowych, przy którym uzyskanie dużej liczby punktów jest czasochłonne (w przeciwieństwie do pomiarów oscyloskopowych). Wydaje się, że ten ostatni problem nie jest wystarczająco podkreślany w klasycznych podręcznikach metod numerycznych [2, 4, 7]. Dlatego autorzy niniejszej pracy podjęli próbę opracowania procedury z możliwością porównania wpływu liczby danych na odchylenie średniokwadratowe. Procedura określa również charakterystyki w funkcji czasu błędu bezwzględnego i względnego w stosunku do krzywej teoretycznej. Wnioski uzyskane z tych badań wykorzystano w technicznym problemie wyznaczenia charakterystyk wyjściowych czujnika optycznego służącego do rejestracji dynamicznych przemieszczeń.

1. OPTYCZNY CZUJNIK PRZEMIESZCZEŃ LINIOWYCH

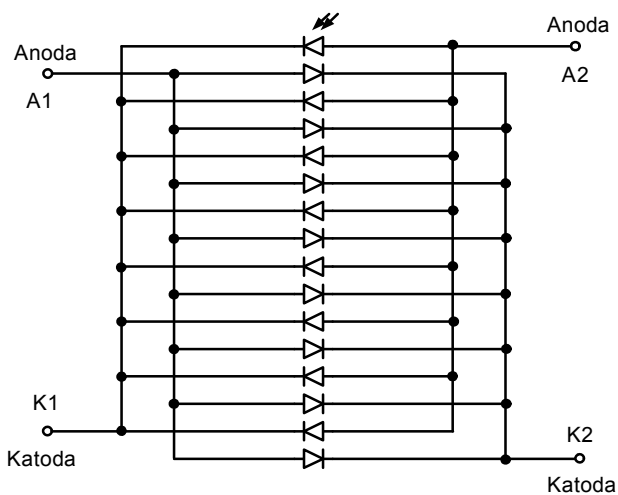
Istotnym fragmentem badań ultraszybkich napędów elektrodynamicznych [3] jest rejestracja przemieszczenia części ruchomej napędu (dysku) (rys. 1). Ze względu na znaczne wartości przyśpieszenia chwilowego osiągające nawet 50 000 g czujniki przemieszczenia muszą charakteryzować się takimi cechami, jak: brak inercji, mała masa i bezstykowość elementów ruchomych oraz odporność na drgania. Dodatkowo, ze względu na generowane silne pole magnetyczne przez cewkę napędu, czujnik musi być odporny na wpływ tego pola. Określenie funkcji przemieszczenia liniowego można wyznaczyć metodą pośrednią, rejestrując przyśpieszenie ultradynamicznym czujnikiem piezoelektrycznym [8], a następnie całkując dwukrotnie uzyskaną funkcję. Do metod bezpośrednich wykorzystuje się wspólnie bardzo drogie ultraszybkie kamery cyfrowe posiadające oprogramowanie, które pozwala na wyznaczenie trajektorii filmowanego ruchomego przedmiotu, a dalej funkcję przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia w czasie. Obecnie kamera firmy Phantom V-12 jest w stanie wykonać milion klatek na sekundę [9].

Alternatywną metodą, znacznie tańszą, jest zastosowanie czujników optycznych. W katedrze Elektroenergetyki Okrętowej Akademii Morskiej został zbudowany optyczny czujnik przemieszczenia liniowego, którego głównym elementem jest układ sekwencyjnie połączonych fotoelementów (rys. 2) stanowiący tzw. linijkę światłoczułą. Linijka światłoczuła znajduje się pod aluminiową przesłoną (rys. 1). Przesłona połączona jest za pomocą lekkiego aluminiowego trzpienia z dyskiem napędu. W czasie ruchu dysku przemieszczająca się przesłona odsłania element światłoczuły. Wzrost oświetlanej powierzchni fotoelementu powoduje zwiększenie się sygnału wyjściowego na jego zaciskach. Czujnik wyposażony jest w filtr szklany wykonany ze szkła matowego, aby poprawić równomierność rozkładu promieniowania świetlnego na całej powierzchni fotoelementu.



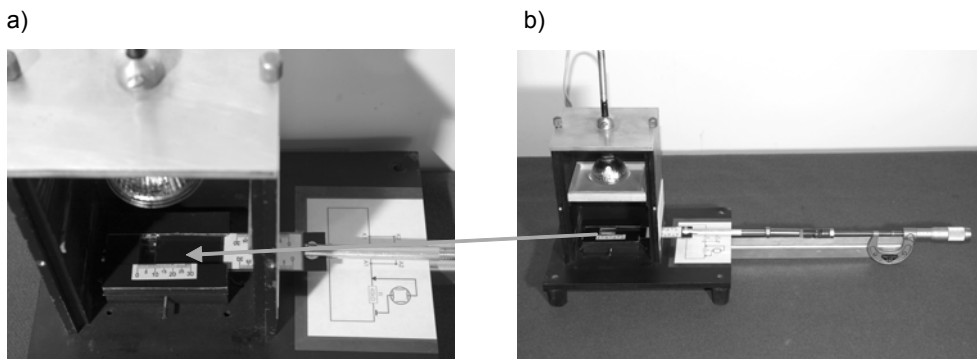
Rys. 1. Schemat układu pomiarowego przemieszczenia prostoliniowego [opracowanie własne]

Obudowa czujnika wykonana z aluminium została pokryta od wewnątrz czarną matową farbą, aby zapobiec ewentualnym odbiciom i załamaniom światła oraz zminimalizować wpływ światła zewnętrznego przedostającego się przez szczelinę w obudowie.



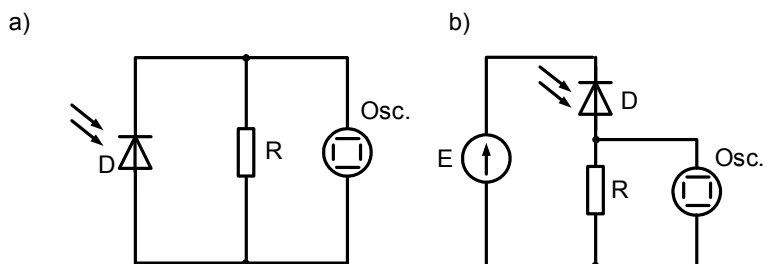
Rys. 2. Układ fotoelementów – linijka światłoczuła [opracowanie własne]

Widok czujnika optycznego, w którym przysłona połączona jest ze śrubą mikrometryczną służącą do kalibracji, przedstawiono na rysunku 3.



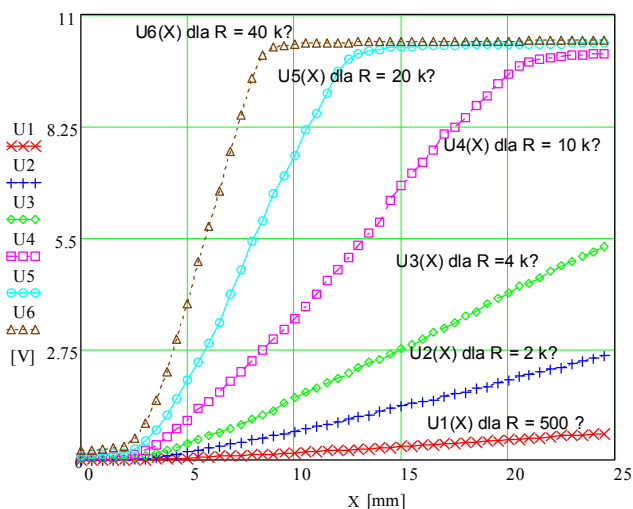
Rys. 3. Czujnik optyczny: a) widok liniiki światłoczułej, b) widok czujnika optycznego [opracowanie własne]

W celu konwersji rejestrowanego przez oscyloskop sygnału napięciowego na funkcję przemieszczenia należy bardzo precyzyjnie wyznaczyć charakterystykę wyjściową czujnika. Charakterystykę fotoelementu można określić w jednym z dwóch układów: ogniwa fotoelektrycznego (rys. 4a) lub w układzie fotodiody zasilanej z zewnętrznego źródła napięcia (rys. 4b). Badania prowadzące do otrzymania najkorzystniejszej charakterystyki kontynuowano w układzie fotodiody, ponieważ charakterystyki w układzie fotoogniwa charakteryzowały się małą czułością.



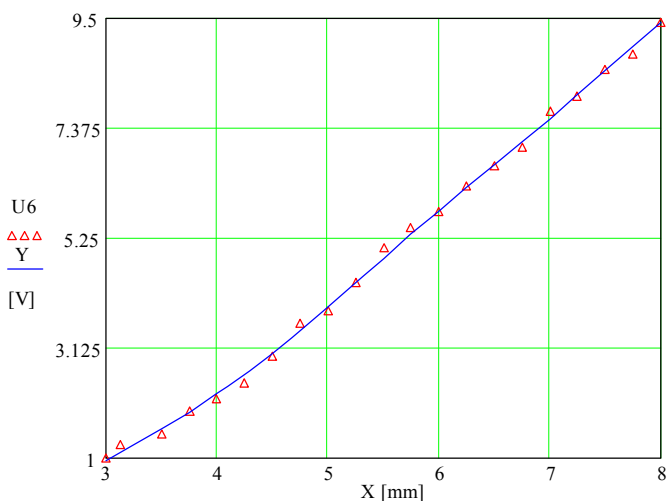
Rys. 4. Schemat połączeń złącza fotoelementu: a) w układzie fotoogniwa, b) w układzie fotodiody [opracowanie własne]

W celu znalezienia najkorzystniejszej charakterystyki zewnętrznej prowadzone były badania z różnymi rodzajami źródeł światła (halogenowe, diodowe) oraz przy różnej wartości rezystancji obciążenia R [6]. Na rysunku 5 przedstawiono rodziny charakterystyk zewnętrznych uzyskanych dla całej długości liniiki światłoczułej w zależności od wartości R dla światła diodowego. Przebiegi te charakteryzowały się strefą nieczułości w początkowym obszarze liniiki oraz nasyceniem dla większych wartości R .



Rys. 5. Rodzina charakterystyk dla różnych R [opracowanie własne]

Badania napędów elektrodynamicznych związane są z ich zastosowaniem w wyłącznikach hybrydowych, w których zasadnicze przemieszczenie istotne dla pracy wyłącznika nie przekracza 5 mm [3]. Dlatego charakterystykę zewnętrzną ostatecznie określono w zakresie pomiędzy strefą nieczułości i momentem nasycenia. Na rysunku 6 przedstawiono zbiór punktów pomiarowych i wyznaczoną na ich podstawie charakterystykę zewnętrzną czujnika dla przedziału między 3 a 8 mm linijki światłoczułej. Przy zmniejszonym zakresie Δx , dla którego wyznaczano charakterystykę, można zauważyć zakłócenia, którymi obarczone są punkty pomiarowe.



Rys. 6. Zaproksymowana charakterystyka dla $\Delta x = 5$ mm [opracowanie własne]

Obserwowane zakłócenia mogą być spowodowane zarówno przez układ pomiarowy, jak i sam fotoelement, który w układzie pracy fotodiody wytwarza szum śrutowy oraz szum niskiej częstotliwości [1]. Ponieważ jako źródło światła zastosowano lampę diodową, nie można również wykluczyć wpływu zmian temperatury otoczenia na prąd fotodiody podczas wyznaczania charakterystyki [1]. Ze względu na uwidaczniające się zakłócenia zarówno o charakterze deterministycznym, jak i stochastycznym konieczne było dokonanie numerycznej filtracji pozwalającej na uzyskanie powtarzalnej precyzyjnej charakterystyki zewnętrznej czujnika.

2. FILTRACJA ZBIORU DANYCH METODĄ APROKSYMACJI ŚREDNIOKWADRATOWEJ

Spśród licznych programów umożliwiających komputerowe wspomaganie projektowania w ostatnim czasie środowisko Mathcad zyskuje sobie coraz większą popularność. Jest to wynikiem najbardziej zbliżonej syntaktyki matematycznej do funkcji wbudowanych środowiska Mathcad w porównaniu z innymi tego typu programami. W środowisku Mathcad istnieje wiele procedur aproksymujących charakterystyki dane w postaci dwóch wektorów przy zastosowaniu kryterium odchylenia średniokwadratowego. Autorzy postanowili jednak zbudować własną procedurę aproksymacji zbioru danych, opierając się na ortogonalnych funkcjach Grama, zwłaszcza że w praktyce pomiarowej otrzymane punkty mogą być równo-odległe. W Mathcadzie funkcje Grama bardzo łatwo można sformułować następująco:

$$Pol_Grama(x, k, n) := \sum_{s=0}^k \left[(-1)^s \cdot \frac{k!}{s! \cdot (k-s)!} \cdot \frac{(k+s)!}{s! \cdot k!} \cdot if \left[s > 0, \frac{\prod_{i=0}^{s-1} (x-i)}{\prod_{i=0}^{s-1} (n-i)}, 1 \right] \right] \quad (2)$$

Powyższy wzór generuje automatycznie kolejne ortogonalne wielomiany Grama w zależności od argumentu k . Współczynniki wielomianu uogólnionego obliczono w Mathcadzie następująco:

$$s_j := \sum_{i=0}^n (Pol_Grama(i, j, n))^2 \quad c_j := \sum_{i=0}^n (y_i \cdot Pol_Grama(i, j, n)) \quad wsp_j := \frac{c_j}{s_j} \quad (3)$$

Ostatecznie wielomian aproksymujący zbiór danych wykorzystujący obliczone współczynniki ma postać:

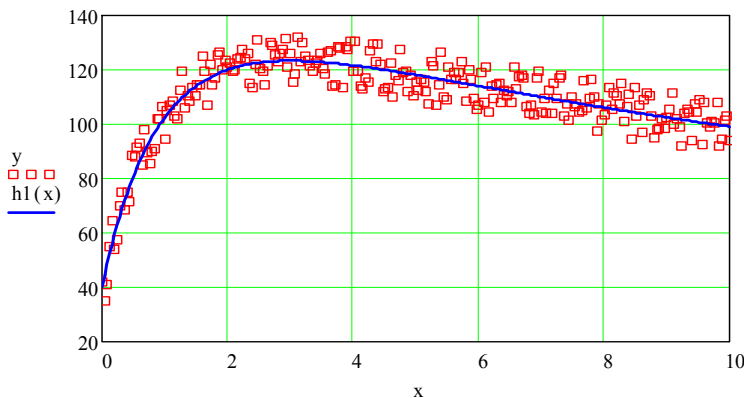
$$gL(t) := \left[\sum_{j=0}^m (wsp_j \cdot wielomian_Grama(getQ(t), j, n)) \right] \quad (4)$$

Aproksymując zbiór punktów pomiarowych zakłada się *a priori*, że zostały wyznaczone z nieokreśloną dokładnością. Do celów dydaktycznych przeprowadzono aproksymacje danych będące sumą funkcji teoretycznej $h1(t)$, do której dodano zakłócenia. Z tego powodu w odrębnym pliku wygenerowano szum z użyciem generatora liczb losowych (*rnd*).

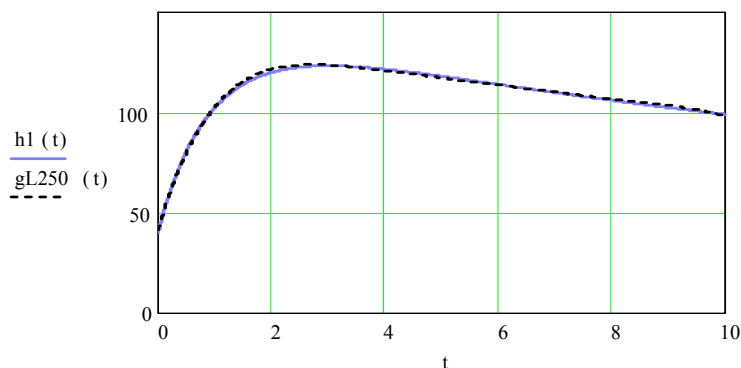
$$d_i := (-1)^{\text{trunc}(\text{rnd}(\text{max_potega}))} \cdot 1 \cdot \text{rnd}(10) \quad h1(t) := \left[\frac{50 \cdot t}{(t+3)^2} + 2 \right] \cdot 20 \quad (5)$$

Warto zwrócić uwagę, że również znak zakłócenia był dobrany losowo. Wygenerowany wektor błędów został następnie zapisany na dysku za pomocą funkcji WRITEPRN pod zdefiniowaną nazwą. Nazwę tę następnie zamieniono ze względu na to, że przy każdym otwarciu tego pliku funkcja *rnd* wygeneruje inną tablicę błędów. Drugi plik zaczyna się od instrukcji READPRN, co pozwala na odczyt niezmienniczego zbioru danych. W programie głównym stworzono procedurę, która z powyższego zbioru może wybierać punkty w zależności od zadeklarowanej liczby. Ponieważ stworzono zbiór danych składający się z 2500 punktów, symulację przeprowadzono dla n będących dzielnikiem 2500 ($n = 10, 20, 25, 50, 100, 200, 500, 1250, 2500$). Gwarantuje to wybór za każdym razem równooddalonych punktów w całym zadanym przedziale. Symulacje przeprowadzono przy zastosowaniu wielomianu 6. stopnia spełniającego warunek $m < 2\sqrt{n}$ określającego stopień wielomianu w stosunku do liczby równoodległych punktów. Listing całej procedury przedstawiono w załączniku do niniejszego artykułu (s. 86–93).

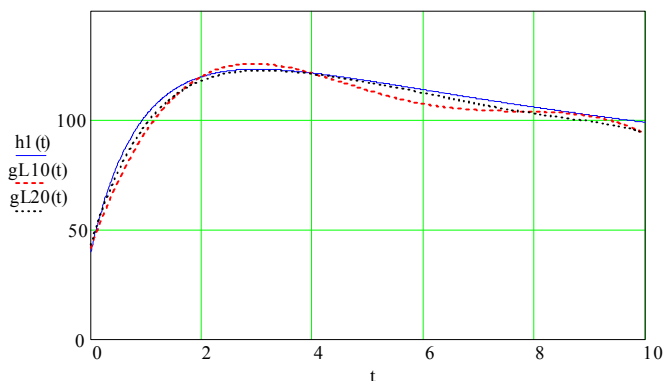
Wyniki badań symulacyjnych dla różnych podzbiorów w zależności od n przedstawiono za pomocą wykresów (rys. 7–12). Na rysunku 7 przedstawiono zasymulowany zbiór danych przez procedurę *Generator danych* (patrz: załącznik) dla liczby punktów $n = 250$. Rysunek 8 ilustruje funkcję wielomianową uzyskaną w wyniku aproksymacji zbioru danych z rysunku 7. Obserwując na rysunku 9 funkcje aproksymujące wyznaczone dla mniejszej liczby punktów pomiarowych ($n = 10, 20$), można stwierdzić, że ich zgodność z funkcją $h1(t)$ (w porównaniu do $gL 250$ z rys. 8) jest niesatysfakcjonująca.



Rys. 7. Zbiór danych pomiarowych ($n = 250$) i funkcja $h1(t)$ [opracowanie własne]

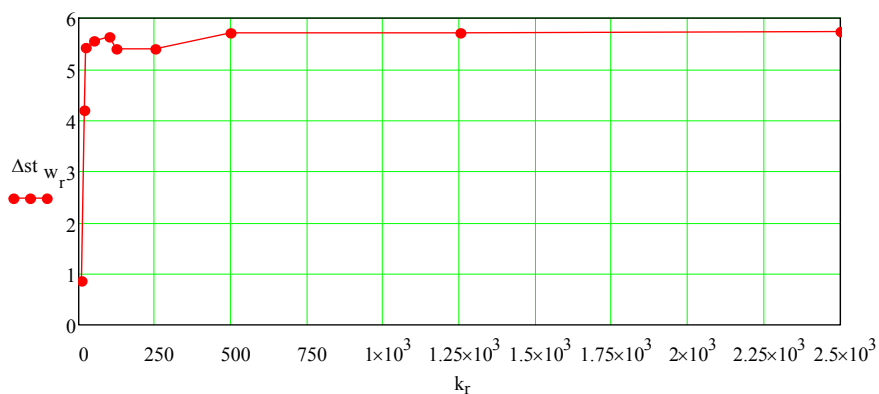


Rys. 8. Aproksymacja dla $n = 2500$ i funkcja $h_1(t)$ [opracowanie własne]



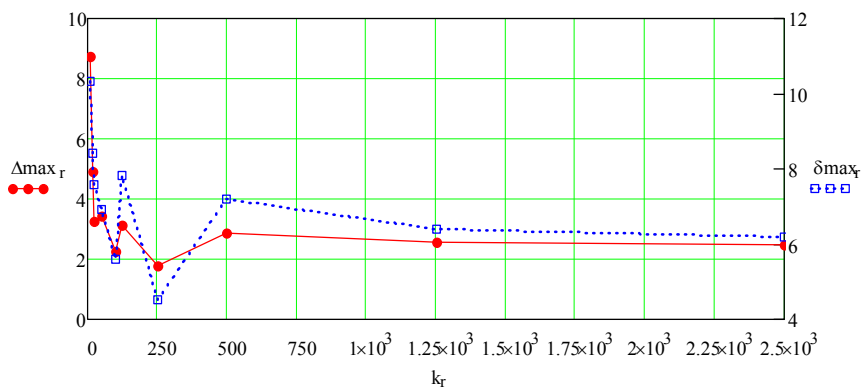
Rys. 9. Aproksymacje dla $n = 10, 20$ i funkcja $h_1(t)$ [opracowanie własne]

Przebieg odchylenia średniokwadratowego wyznaczonego na podstawie wzoru (1) dla liczebności zbiorów punktów pomiarowych $n = 10, 20, 25, 50, 100, 200, 500, 1250, 2500$ przedstawiono na rysunku 10.

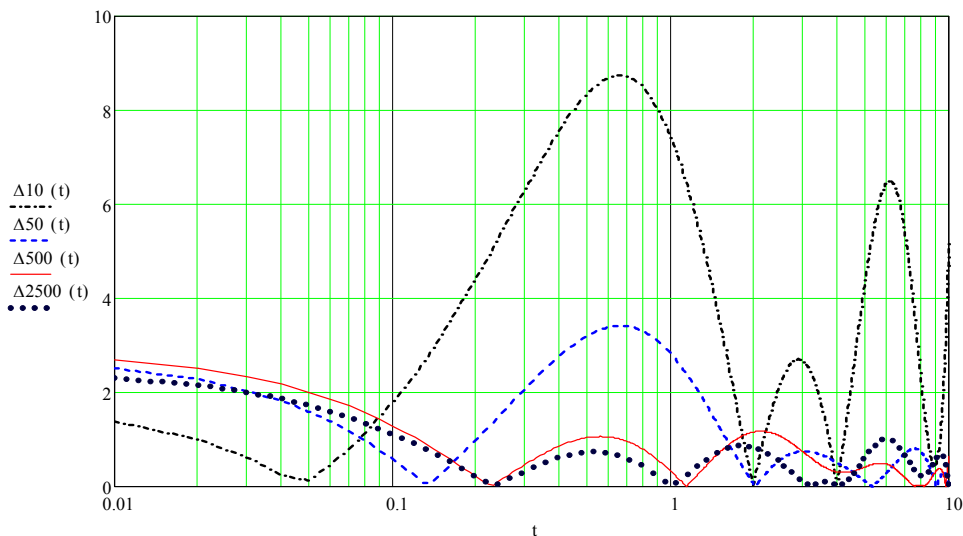


Rys.10. Odchylenie średniokwadratowe w funkcji liczby punktów pomiarowych [opracowanie własne]

Z przebiegu odchylenia średniokwadratowego w funkcji liczby punktów pomiarowych wynika, że począwszy od $n = 500$ błąd ten nie ulegał zmianie. Dla wszystkich badanych przypadków określono maksymalne błędy bezwzględne oraz względne na podstawie przebiegów wartości bezwzględnej tych błędów w funkcji czasu (rys. 12). Przebieg supremów błędów bezwzględnych i względnych w zależności od n przedstawia rysunek 11.



Rys. 11. Wykres maksymalnego błędu względnego i bezwzględnego [opracowanie własne]



Rys. 12. Błąd bezwzględny w funkcji czasu [opracowanie własne]

PODSUMOWANIE

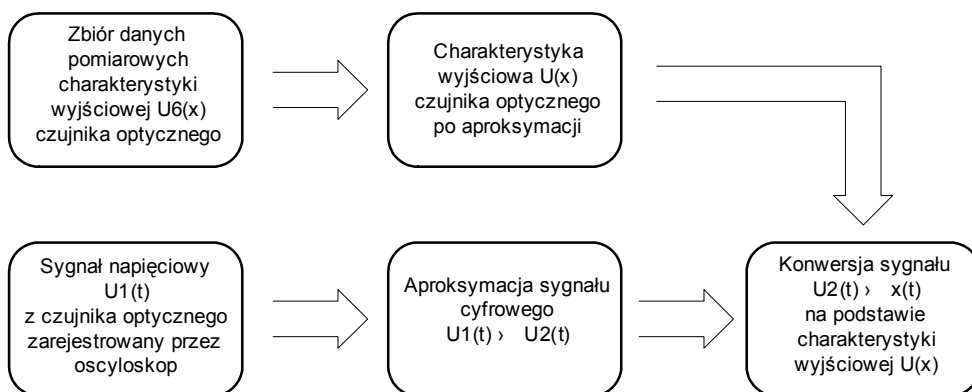
Obserwując przebieg z rysunku 10 można stwierdzić, że najmniejszą wartość miary odchylenia średniokwadratowego otrzymano dla aproksymacji przy $n = 10$ punktów pomiarowych, mimo że zarówno błąd względny, jak i bezwzględny dla tego przebiegu okazał się największy (rys. 11–12). Z drugiej strony należy pamiętać, że odchylenie średniokwadratowe punktów nie jest wyznaczone w stosunku do punktów krzywej teoretycznej. Oznacza to, że odchylenie nie powinno być jedynym wskaźnikiem wyboru najlepszej aproksymacji, mimo mniejszej wartości odchylenia średniokwadratowego (podobne wyniki uzyskano z innymi funkcjami bazowymi). W pracy [7] można znaleźć stwierdzenie, że ze wzrostem liczby punktów zbliżamy się do wartości oczekiwanej (przy założeniu braku błędów systematycznych). Jednak obserwując przebieg błędów oraz same aproksymacje, można było stwierdzić, że najlepszą aproksymacją (przy zastosowaniu wielomianów Grama) jest przypadek dla $n = 250$ punktów (rys. 8). Problem wydaje się być jednak otwarty, gdyż w praktyce inżynierskiej nieznana jest funkcja teoretyczna i nie można dokonać takich porównań.

Odrębnym zagadnieniem nieporuszanym w tym artykule jest dobór funkcji bazowych oraz stopnia wielomianu uogólnionego. Jednakże wyniki przeprowadzonych symulacji dla danego zbioru danych ($n = 2500$) pokazały, że w miarę wzrostu stopnia wybranego wielomianu błąd średniokwadratowy malał asymptotycznie.

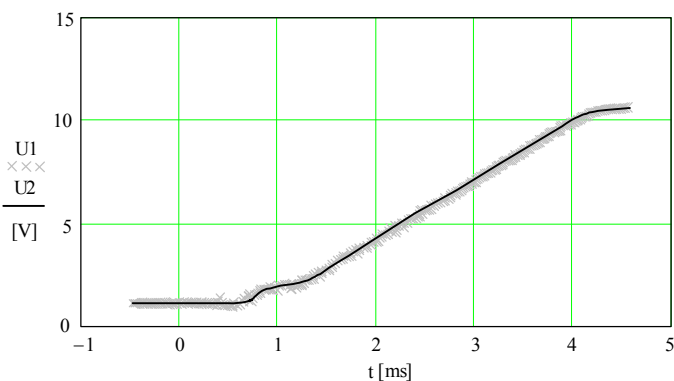
Podsumowując uzyskane wyniki z badań filtracji zbiorów danych metodą aproksymacji średniokwadratowej, można stwierdzić, że:

- począwszy od pewnej liczby punktów pomiarowych błąd średniokwadratowy nie zmienia swojej wartości,
- przebieg błędu średniokwadratowego w funkcji liczby punktów pomiarowych nie powinien być jedynym kryterium określającym wystarczającą ich liczbę do wyznaczenia funkcji aproksymującej,
- błąd średniokwadratowy nie może być również jedynym wskaźnikiem określającym stopień wielomianu aproksymującego.

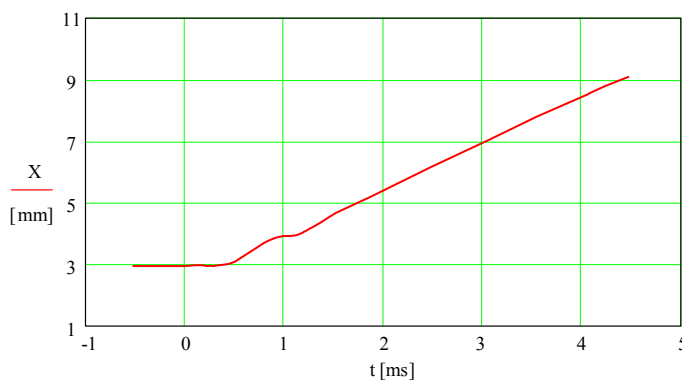
Do aproksymacji punktów pomiarowych uzyskanych przy wyznaczaniu charakterystyki wyjściowej czujnika optycznego wykorzystano opracowaną w środowisku Mathcad procedurę opartą na ortogonalnych funkcjach Grama. Jako wystarczającą liczbę punktów pomiarowych na drodze 5 mm przy wyznaczaniu tej charakterystyki przyjęto $n = 50$. Uzyskanie większej liczby pomiarów byłoby utrudnione ze względu na rozdzielczość stosowanej śruby mikrometrycznej. Procedura ta została również wykorzystana do aproksymacji oscyloskopowych wyników przemieszczenia dysku przed konwersją (rys. 14) z użyciem charakterystyki wyjściowej (rys. 15). Metodę wyznaczania przebiegu przemieszczenia przedstawia schemat blokowy (rys. 13).



Rys. 13. Schemat blokowy procedury wyznaczania przebiegu przemieszczenia [opracowanie własne]



Rys. 14. Przebieg napięcia na zaciskach czujnika i jego aproksymacja [opracowanie własne]



Rys. 15. Przebieg przemieszczenia uzyskany po konwersji na podstawie charakterystyki wyjściowej czujnika [opracowanie własne]

ZAŁĄCZNIK

Listing programu do badania jakości aproksymacji

Generator danych

```

n := 2500      i := 0 .. n      max_potega := 9
di := (-1)trunc (rnd (max_potega)) . 1 . rnd (10)

WRITEPRN ("SzumikX") := d      h1(t) :=  $\left[ \frac{50 \cdot t}{(t + 3)^2} + 2 \right] \cdot 20$ 

xi := i ·  $\frac{10}{n}$       hszCi := h1(xi) + di      WRITEPRN ("Punkty_i_szum1") := hszC

```

Start procedury aproksymującej

$$h_1(t) := \left[\frac{t \cdot 50}{(t + 3)^2} + 2 \right] \cdot 20 \quad h_1(0) = 40 \text{ funkcja teoretyczna}$$

Weztywanie danych

```
i := 0 .. n      punktyIszum := READPRN ("Punkty_i_szum1.prn")
```

Generowanie podzbioru

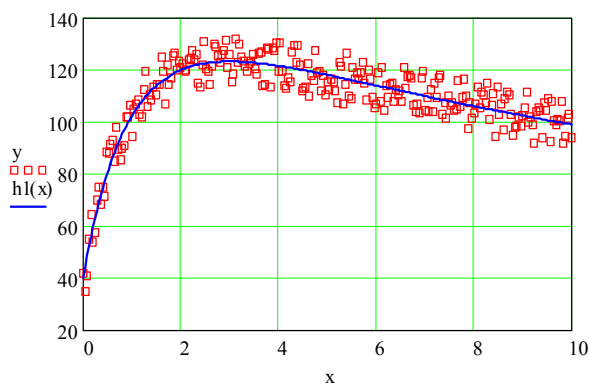
```

PIS_count := length(punktyIszum)      PIS_count = 2.501 × 103
PIS_step := floor( $\frac{\text{PIS\_count}}{n}$ )      PIS_step = 10      xi := i ·  $\frac{10}{n}$ 
j(i) := i · PIS_step      hszi := punktyIszum j(i)      yi := hszi

```

Zbiór wygenerowanych danych pomiarowych na tle funkcji teoretycznej

x _i =	y _i =
0	41.9332301989
0.04	34.7692565293
0.08	41.0830859645
0.12	55.1233050669
0.16	64.4534402724
0.2	53.7525840569
0.24	57.3109448781
0.28	70.1159267076
...	...



Wielomiany Grama

$$\text{Pol_Grama}(x, k, n) := \sum_{s=0}^k \left[(-1)^s \cdot \frac{k!}{s! \cdot (k-s)!} \cdot \frac{(k+s)!}{s! \cdot k!} \cdot \text{if } s > 0, \frac{\prod_{i=0}^{s-1} (x-i)}{\prod_{i=0}^{s-1} (n-i)}, 1 \right]$$

x – argument

k – stopień wielomianu

n – liczba punktów

Wybór stopnia wielomianu uogólnionego

$$m := 6 \quad j := 0..m$$

Sprawdzenie ortogonalności

$$\sum_{i=0}^n (\text{Pol_Grama}(i, 5, n) \cdot \text{Pol_Grama}(i, 6, n)) = -7.6039174957 \times 10^{-13}$$

Wyznaczenie współczynników wielomianu uogólnionego

$$s_j := \sum_{i=0}^n (\text{Pol_Grama}(i, j, n))^2 \quad c_j := \sum_{i=0}^n (y_i \cdot \text{Pol_Grama}(i, j, n)) \quad \text{wsp}_j := \frac{c_j}{s_j}$$

$s_j =$

251
84.336
51.4144771084
37.6131255344
30.2021723252
25.7153751061
22.8249185008

$c_j =$

2.7548981903·10 ⁴
-154.8657295419
-1.2346063619·10 ³
-767.9840599728
-412.6185510238
-150.4157173273
-49.667284559

$\text{wsp}_j =$

109.7569000115
-1.8362944596
-24.0128156758
-20.4179804008
-13.661883211
-5.8492523133
-2.1760114744

wsp_j – uzyskane współczynniki w zależności od n

$$S10 := \begin{pmatrix} 102.778973086 \\ -8.3714550614 \\ -27.7718308074 \\ -17.9231181876 \\ -7.2211403481 \\ 0.1878901463 \\ 0.1095770391 \end{pmatrix} \quad S20 := \begin{pmatrix} 105.7273062301 \\ -4.3975831877 \\ -27.688347248 \\ -18.619252057 \\ -8.3025642411 \\ -2.4252231807 \\ -0.9335850799 \end{pmatrix} \quad S25 := \begin{pmatrix} 107.5501967955 \\ -4.2089823227 \\ -26.5511259324 \\ -20.6181345059 \\ -10.0577561768 \\ -1.8454622999 \\ -1.2307217317 \end{pmatrix} \quad S50 := \begin{pmatrix} 108.5626876404 \\ -3.5336960267 \\ -25.992511057 \\ -20.8253560589 \\ -10.3149161491 \\ -3.8488697477 \\ -1.2787447412 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc}
 S100 := \begin{pmatrix} 108.9976816858 \\ -2.2086016952 \\ -24.1348846198 \\ -20.5431727906 \\ -11.6547256723 \\ -5.7904290138 \\ -2.4213358777 \end{pmatrix} & S125 := \begin{pmatrix} 109.7331440917 \\ -2.2664724851 \\ -22.7956312866 \\ -19.2793773007 \\ -14.9535042242 \\ -5.4984992602 \\ -1.8084359084 \end{pmatrix} & S250 := \begin{pmatrix} 109.7569000115 \\ -1.8362944596 \\ -24.0128156758 \\ -20.4179804008 \\ -13.661883211 \\ -5.8492523133 \\ -2.1760114744 \end{pmatrix} \\
 \\
 S500 := \begin{pmatrix} 109.9577539004 \\ -1.4635270406 \\ -24.7587786419 \\ -20.5688896798 \\ -12.1352246381 \\ -5.7909644929 \\ -2.3617241806 \end{pmatrix} & S1250 := \begin{pmatrix} 109.9316454978 \\ -1.7080881902 \\ -24.1468666854 \\ -20.7039418378 \\ -12.0100844435 \\ -6.3609444034 \\ -2.4357678561 \end{pmatrix} & S2500 := \begin{pmatrix} 110.1192409791 \\ -1.6794607312 \\ -24.5219401334 \\ -20.0674672015 \\ -12.0313474157 \\ -6.5639587408 \\ -2.7802234539 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Transformacja danych w zbiór liczb naturalnych

$$x_step := x_1 - x_0 \quad \text{getQ}(\text{val}, \text{lba}) := \frac{\text{val}}{10} \cdot \text{lba} \quad \text{getQ1}(\text{val}) := \frac{(\text{val} - x_0)}{x_step}$$

Wielomian uogólniony (aproxymujący zbiór danych)

$$\text{faprox}(t, W, \text{lba}) := \left[\sum_{j=0}^m (W_j \cdot \text{Pol_Grama}(\text{getQ}(t, \text{lba}), j, \text{lba})) \right]$$

$$\text{faprox}_p(t) := \left[\sum_{j=0}^m (\text{wsp}_j \cdot \text{Pol_Grama}(\text{getQ1}(t), j, n)) \right]$$

$$\text{gL10}(t) := \text{faprox}(t, S10, 10) \quad \text{gL20}(t) := \text{faprox}(t, S20, 20)$$

$$\text{gL25}(t) := \text{faprox}(t, S25, 25) \quad \text{gL50}(t) := \text{faprox}(t, S50, 50)$$

$$\text{gL100}(t) := \text{faprox}(t, S100, 100) \quad \text{gL125}(t) := \text{faprox}(t, S125, 125)$$

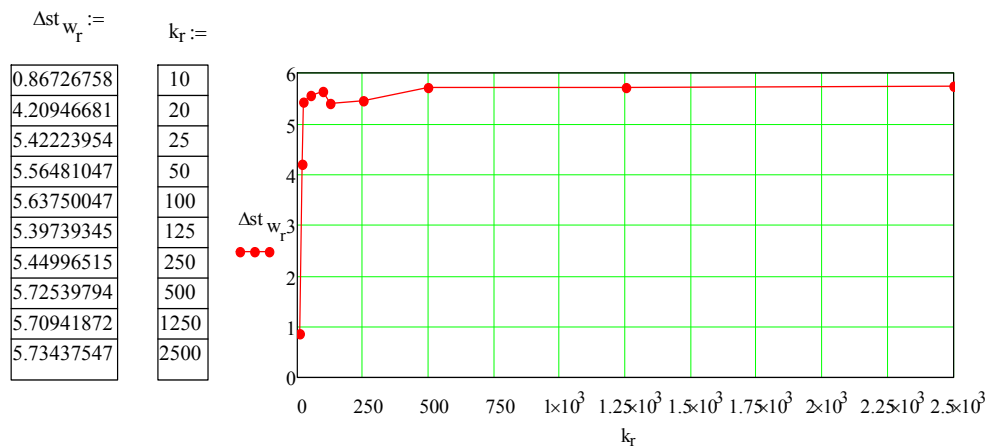
$$t := 0, 0.01 \dots 10$$

$$\text{gL}(t) := \text{faprox}_p(t)$$

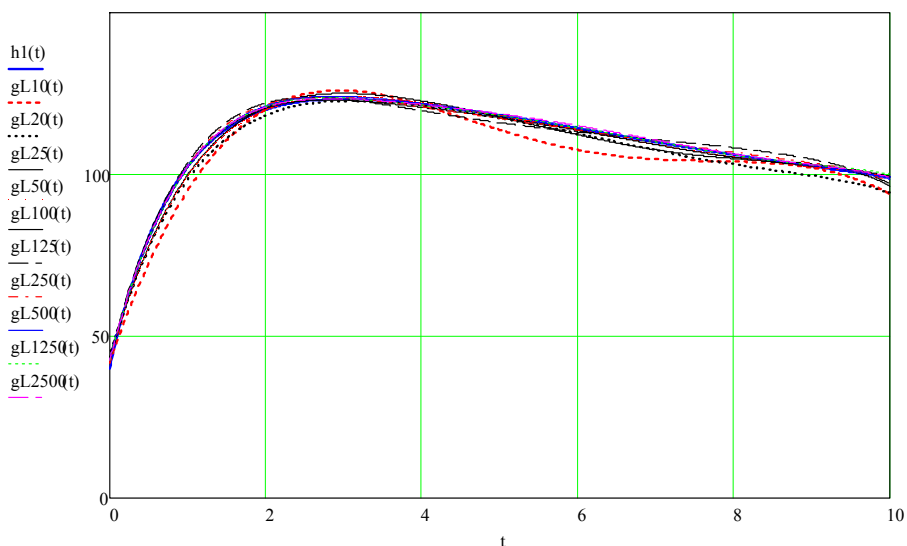
Błąd średniokwadratowy

$$\Delta st_n := \sqrt{\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^n (y_i - gL(x_i))^2} \quad \Delta st_n = 5.44996515 \quad n \equiv 250 \quad r := 1..10$$

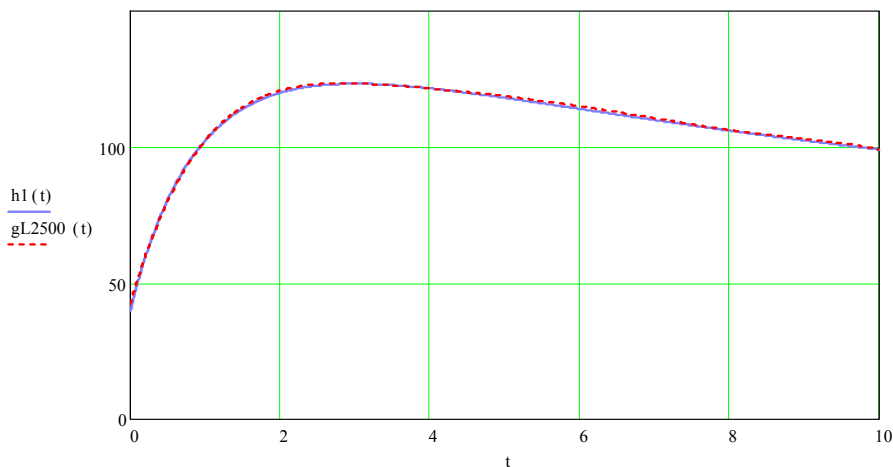
Wyniki błędu średniokwadratowego dla różnej liczby wybranych punktów n (k_r):



Aproksymacje funkcji dla różnych n



Aproksymacje funkcji dla $n = 2500$



Błąd bezwzględny (wartość bezwzględna) dla różnych n

$$\Delta_{10}(t) := |g_{L10}(t) - h_1(t)| \quad \Delta_{20}(t) := |g_{L20}(t) - h_1(t)|$$

$$\Delta_{25}(t) := |g_{L25}(t) - h_1(t)| \quad \Delta_{50}(t) := |g_{L50}(t) - h_1(t)|$$

$$\Delta_{100}(t) := |g_{L100}(t) - h_1(t)| \quad \Delta_{125}(t) := |g_{L125}(t) - h_1(t)|$$

$$\Delta_{250}(t) := |g_{L250}(t) - h_1(t)| \quad \Delta_{500}(t) := |g_{L500}(t) - h_1(t)|$$

$$\Delta_{1250}(t) := |g_{L1250}(t) - h_1(t)| \quad \Delta_{2500}(t) := |g_{L2500}(t) - h_1(t)|$$

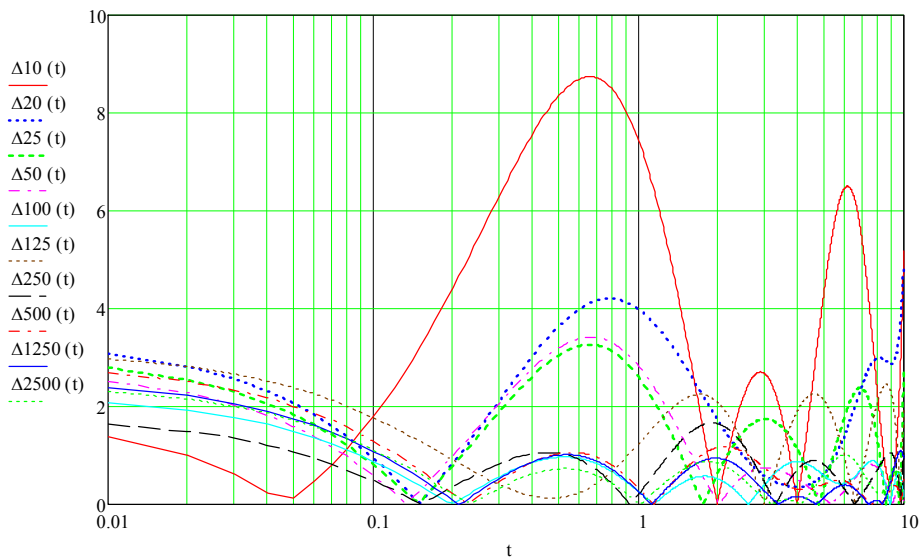
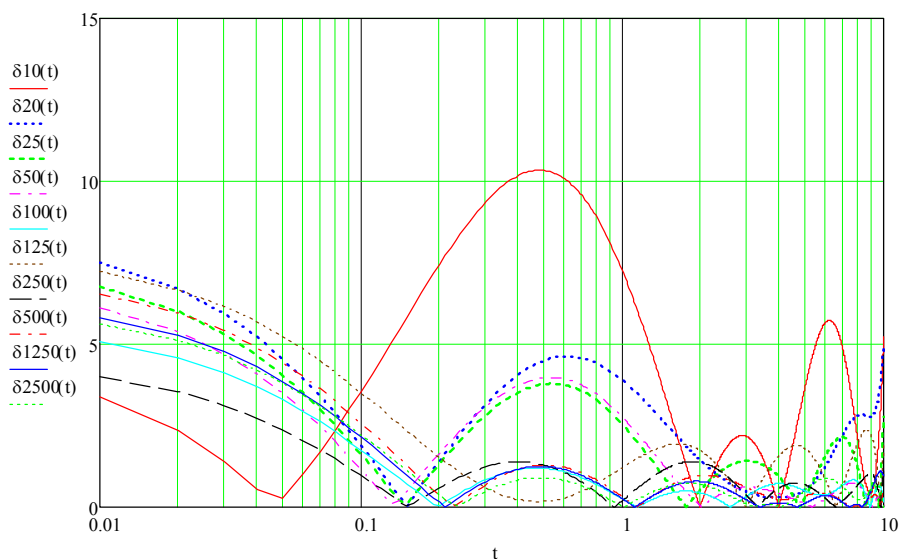
Błąd względny (wartość bezwzględna) dla różnych n

$$\delta_{10}(t) := \frac{|\Delta_{10}(t)|}{|h_1(t)|} \cdot 100 \quad \delta_{20}(t) := \frac{|\Delta_{20}(t)|}{|h_1(t)|} \cdot 100 \quad \delta_{25}(t) := \frac{|\Delta_{25}(t)|}{|h_1(t)|} \cdot 100$$

$$\delta_{50}(t) := \frac{|\Delta_{50}(t)|}{|h_1(t)|} \cdot 100 \quad \delta_{100}(t) := \frac{|\Delta_{100}(t)|}{|h_1(t)|} \cdot 100 \quad \delta_{125}(t) := \frac{|\Delta_{125}(t)|}{|h_1(t)|} \cdot 100$$

$$\delta_{250}(t) := \frac{|\Delta_{250}(t)|}{|h_1(t)|} \cdot 100 \quad \delta_{500}(t) := \frac{|\Delta_{500}(t)|}{|h_1(t)|} \cdot 100$$

$$\delta_{1250}(t) := \frac{|\Delta_{1250}(t)|}{|h_1(t)|} \cdot 100 \quad \delta_{2500}(t) := \frac{|\Delta_{2500}(t)|}{|h_1(t)|} \cdot 100$$

Błąd bezwzględny w funkcji czasu**Błąd względny w funkcji czasu****Maksymalna wartość błędu bezwzględnego**

$$\begin{aligned} \Delta_{\max 10_i} &:= \Delta_{10}(x_i) & \Delta_{\max 20_i} &:= \Delta_{20}(x_i) & \Delta_{\max 25_i} &:= \Delta_{25}(x_i) \\ \Delta_{\max 50_i} &:= \Delta_{50}(x_i) & \Delta_{\max 100_i} &:= \Delta_{100}(x_i) & \Delta_{\max 125_i} &:= \Delta_{125}(x_i) \\ \Delta_{\max 250_i} &:= \Delta_{250}(x_i) & \Delta_{\max 500_i} &:= \Delta_{500}(x_i) & & \end{aligned}$$

$$\Delta_{\max 1250_i} := \Delta_{1250}(x_i) \quad \Delta_{\max 2500_i} := \Delta_{2500}(x_i)$$

 $\Delta_{\max r} :=$

max($\Delta_{\max 10}$)
max($\Delta_{\max 20}$)
max($\Delta_{\max 25}$)
max($\Delta_{\max 50}$)
max($\Delta_{\max 100}$)
max($\Delta_{\max 125}$)
max($\Delta_{\max 250}$)
max($\Delta_{\max 500}$)
max($\Delta_{\max 1250}$)
max($\Delta_{\max 2500}$)

 $\Delta_{\max r} =$

8.7376859801
4.9267295466
3.2587652541
3.413356205
2.2445320164
3.1312236265
1.8026624766
2.8786452265
2.5659520814
2.4748433026

 $k_r =$

10
20
25
50
100
125
250
500
$1.25 \cdot 10^3$
$2.5 \cdot 10^3$

Maksymalna wartość błędę względnę

$$\delta_{\max 10_i} := \delta_{10}(x_i) \quad \delta_{\max 20_i} := \delta_{20}(x_i) \quad \delta_{\max 25_i} := \delta_{25}(x_i)$$

$$\delta_{\max 50_i} := \delta_{50}(x_i) \quad \delta_{\max 100_i} := \delta_{100}(x_i) \quad \delta_{\max 125_i} := \delta_{125}(x_i)$$

$$\delta_{\max 250_i} := \delta_{250}(x_i) \quad \delta_{\max 500_i} := \delta_{500}(x_i)$$

$$\delta_{\max 1250_i} := \delta_{1250}(x_i) \quad \delta_{\max 2500_i} := \delta_{2500}(x_i)$$

 $\delta_{\max r} :=$

max($\delta_{\max 10}$)
max($\delta_{\max 20}$)
max($\delta_{\max 25}$)
max($\delta_{\max 50}$)
max($\delta_{\max 100}$)
max($\delta_{\max 125}$)
max($\delta_{\max 250}$)
max($\delta_{\max 500}$)
max($\delta_{\max 1250}$)
max($\delta_{\max 2500}$)

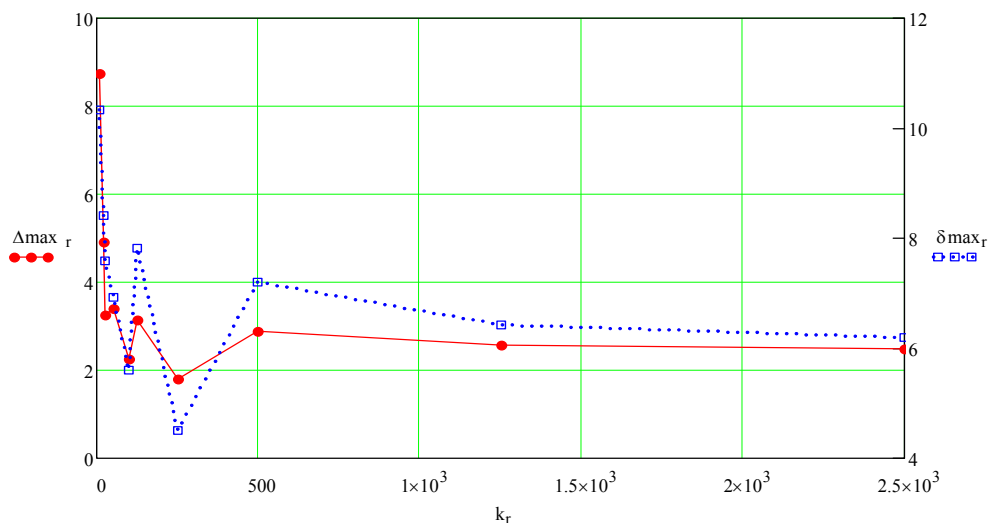
 $\delta_{\max r} =$

10.3389559208
8.4018780893
7.5950345653
6.9214846495
5.611330041
7.8280590663
4.5066561915
7.1966130662
6.4148802035
6.1871082565

 $k_r =$

10
20
25
50
100
125
250
500
$1.25 \cdot 10^3$
$2.5 \cdot 10^3$

Wykres maksymalnego błędu względnego i bezwzględnego



Koniec programu

LITERATURA

1. Boot K., *Optoelektronika*, WKiŁ, Warszawa 2001.
2. Dahlquist G., Björck A., *Numerical Methods*, PWN, Warszawa 1983.
3. Czucha J., Wołoszyn J., Wołoszyn M., *The comparison of ultra fast A.C. hybrid circuit breakers with GTO and IGBT*, 35th Universities Power Engineering Conference UPEC'2000, Belfast, 6–8 September 2000.
4. Fortuna Z. i inni, *Numerical Methods*, WNT, Warszawa 1982.
5. Jankowski P., *Analysis of Measurement Results in Electrotechnics in Mathcad Environment*, Akademia Morska w Gdyni, Gdynia 2003.
6. Jankowski P., Dudojć B., Mindykowski J., *Simple method of dynamic displacement record of contacts driven by inductive dynamic drive*, *Metrology and Measurement Systems*, PAN, 2009.
7. Ralston A., *Introduction to Numerical Analysis*, PWN, Warszawa 1983.
8. www.pcp.cpm.
9. www.visionresearch.com.

DETERMINING CHARACTERISTIC OF OPTIMETER BY MEAN SQUARE APPROXIMATION METHOD

Summary

For registration of the ultra-rapid displacement we must apply very dynamic sensor. The most common ones are optimeters. The paper describes a method of determining the static characteristic of the optimizer of which the main part is a system of photo-diodes. The outer characteristic was supsmoothed by mean square approximation. The authors have built their own procedure of approximation in the Mathcad environment based on Gram orthogonal functions for a set of measurement data.

The measurement data set was built adding a set of stochastic interferences to a known theoretical function. Calculation results are the basis for the choice of measurement data number.