

Zbigniew Powierza

Akademia Morska w Gdyni

OPERATOROWO-DYSTRYBUCYJNA METODA PARAMETRÓW BRZEGOWYCH Z WYKORZYSTANIEM „S” FUNKCJI DO OBLICZEŃ DRGAŃ GIĘTYCH KADŁUBA STATKU

W artykule przedstawiono analityczną metodę obliczania drgań giętych kadłuba statku. Jako model fizyczny przyjęto belkę Eulera o zmiennej masie i sztywności pływającą swobodnie na powierzchni wody. Wykres zmiany parametrów ma praktycznie postać funkcji schodkowej i w takim ujęciu różniczkowalnej w zakresie dystrybucyjnym, co pozwala z kolei przy pewnych przekształceniach na doprowadzenie równania różniczkowego drgań giętych kadłuba do postaci dającej się łatwo rozwiązać przez przekształcenie Carsona-Laplace'a. Tego typu rozwiązań nie ma w literaturze dotyczącej zagadnień dynamiki kadłuba statku.

Słowa kluczowe: model, drgania giętne, kadłub, statek, belka, masa.

WSTĘP

Do obliczeń ogólnej wytrzymałości kadłuba oraz jego drgań giętych stosowane są różne modele obliczeniowe. Przy standardowych obliczeniach, zarówno statycznych, jak i dynamicznych, modelem fizycznym jest belka o zmiennej masie i sztywności – belka Eulera-Bernoulliego poddana obciążeniom zewnętrznym, pływająca na powierzchni wody. Według danych angielskich [15] wykresy naprężeń normalnych mierzonych i obliczanych w przekrojach poprzecznych kadłuba praktycznie się pokrywają, a różnice nie przekraczają 3%. Analitycznie rozwiązanie równania różniczkowego (2) przy skokowo zmiennych parametrach wykonano na podstawie teorii dystrybucji [6]. Stosując metodę Łazarjana [9–12], wprowadzono do równania różniczkowego „S” funkcję pierwszego stopnia [1, 4, 5, 16, 18], która służy w tym przypadku nie do aproksymacji, lecz do sprowadzenia równania do postaci dającej się rozwiązać za pomocą przekształcenia Laplace'a-Carsona. Tego typu rozwiązanie nie było dotychczas stosowane w literaturze okrętowej z zakresu dynamiki kadłuba.

Przy okazji przedstawione rozwiązanie analityczne można łatwo uogólnić do obliczeń częstości drgań własnych belek niepryzmatycznych o dowolnie zmiennej masie i dowolnych warunkach brzegowych.

Przedstawiona metoda ma szereg zalet:

- przyjęcie prostego modelu fizycznego przy dostatecznej dokładności wyników w zakresie drgań oraz obliczeń ogólnej wytrzymałości kadłuba;
- krótki czas przygotowania danych;
- łatwość analizy wyników obliczeń.

1. DRGANIA WŁASNE TŁUMIONE KADŁUBA STATKU

Modelując kadłub statku belką niepryzmatyczną, o zmiennej masie i sztywności, pływającą swobodnie na powierzchni wody, zapisujemy równanie różniczkowe linii ugięcia w postaci:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} + p(x, t) + \gamma B(x) z(x, t) + q(x, t) = 0. \quad (1)$$

Przyjęcie skokowo zmiennej masy i sztywności prowadzi do zapisu równania (1) w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \left[EI_0 \sum_{i=0}^n \xi_i H_0(x - x_i) \right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right\} + \left[m_0 \sum_{i=0}^n \zeta_i H_0(x - x_i) \right] \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \\ + p(x, t) + \left[\gamma B_0 \sum_{i=0}^n \vartheta_i H_0(x - x_i) \right] \cdot z(x, t) + q(x, t) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie:

EI_0, m_0, B_0 – sztywność, masa i szerokość kadłuba przy $0 < x < x_1$,

ξ, ζ, ϑ – parametry zmiany,

$EI(x), m(x), B(x)$ dla $x = x_1$,

przy czym dla $i = 0$ $\xi_0 = \vartheta_0 = \zeta_0 = 1, x_0 = 0$,

$H_0(x - x_i)$ – funkcja Heaviside'a,

$$H_0(x - x_i) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < x_i \\ 1 & \text{dla } x \geq x_i \end{cases}$$

Siły tłumienia:

$$p(x, t) = 2\bar{\alpha}m(x) \frac{\partial z}{\partial t}$$

przyjęto jako proporcjonalne do masy i prędkości. W tym przypadku współczynnik $\bar{\alpha}$ zawiera łączny efekt tłumienia materiałowego kadłuba oraz tłumienia zewnętrznego. Przyjęcie tego typu jest szeroko stosowane ze względu na wygodę rozwiązywania równania (1) (por. np. [7, 19]), jak również krytykowane ze zrozumiałych powodów. W tym przypadku wielkość współczynnika $\bar{\alpha}$ dla okrętu obliczono wg wzoru (3) ustalonego na drodze teoretyczno-doświadczalnej przez W. Czyżę [3]:

$$\bar{\alpha} = \frac{1,9 \div 2,5}{T_n} \approx (6,7 \div 8,9) \sqrt{\frac{EI_0}{m_0 L^3}} \left[\frac{1}{s} \right], \quad (3)$$

$$T_n = 0,281 \sqrt{\frac{m_0 L^3}{EI_0}} \text{ [s]},$$

gdzie:

- $L = L_{pp}$ [m] – długość kadłuba między pionami,
- E [MPa] – moduł sprężystości materiału kadłuba,
- $m_0 \left[\frac{t}{m} \right]$ – masa zredukowana kadłuba na jednostkę długości,
- I_0 [m⁴] – zredukowany moment bezwładności przekroju poprzecznego kadłuba wg [17],
- $q(x, t)$ – obciążenie zewnętrzne kadłuba.

Rozwiązania równania (2) poszukujemy w postaci:

$$z(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(x) \cdot F_k(t). \quad (4)$$

Obciążenie dynamiczne rozkładamy w szereg:

$$q(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \cdot m(x) \cdot z_k(x). \quad (5)$$

Po podstawieniu (4) i (5) do (1) i rozdzieleniu zmiennych mamy:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x)z_k''(x)] + \frac{\gamma B(x)}{m(x)} = \frac{\ddot{F}_k(t)}{F_k(t)} - \frac{2 \bar{\alpha} \dot{F}_k(t)}{F_k(t)} - \frac{q_k(t)}{F_k(t)}. \quad (6)$$

Przyrównując każdą stronę do stałej wielkości ω_k^2 , otrzymujemy nieskończoną liczbę $k = 1, 2, \dots, \infty$ układów dwóch równań:

$$\frac{\partial}{\partial x^2} [EI(x) \cdot z_k''(x)] - [\omega_k^2 \cdot m(x) - \gamma \cdot B(x)] \cdot z_k(x) = 0, \quad (7)$$

$$\ddot{F}_k(t) + 2 \bar{\alpha} \dot{F}_k(t) + \omega_k^2 F_k(t) = -q_k(t). \quad (8)$$

Ponieważ

$$M_k(x) = -EI(x) \cdot z_k''(x), \quad (9)$$

możemy wprowadzić oznaczenie:

$$\bar{M}_k = -\frac{M_k}{EI_0} = \frac{I(x)}{I_0} \cdot z_k'', \quad (10)$$

gdzie:

$\bar{M}_k = \bar{M}_K(x)$ – moment gnący $M_k = M_K(x)$ w przekroju x pomnożony przez współczynnik: $-\frac{1}{EI_0}$,

$z_k = z_k(x)$ – linia ugięcia,

stąd:

$$EI_0 \cdot \bar{M}_K = EI(x) \cdot z_k''. \quad (11)$$

Po podstawieniu zależności (11) do (7) otrzymujemy:

$$\bar{M}_{kxx}'' = \frac{1}{EI_0} \cdot [\omega_k^2 m(x) - \gamma \cdot B(x)] \cdot z_k. \quad (12)$$

Ponieważ:

$$m(x) = m_0 \sum_{i=0}^n \zeta_i \cdot H_0(x - x_i), \quad (13)$$

$$B(x) = B_0 \cdot \sum_{i=0}^n \vartheta_i \cdot H_0(x - x_i), \quad (14)$$

to

$$\bar{M}_{kxx}'' = \left[\frac{\omega_k^2 m_0}{EI_0} \sum_{i=0}^n \zeta_i \cdot H_0(x - x_i) - \frac{\gamma B_0}{EI_0} \cdot \sum_{i=0}^n \vartheta_i \cdot H_0(x - x_i) \right] \cdot z_k. \quad (15)$$

Oznaczając następnie:

$$k_{1k}^4 = \frac{\omega_k^2 m_0}{EI_0}, \quad (16)$$

$$k_{2k}^4 = \frac{\gamma B_0}{EI_0}, \quad (17)$$

otrzymujemy:

$$\bar{M}_{KX}'' = \left[k_{1k}^4 \sum_{i=0}^n \zeta_i \cdot H_0(x - x_i) - k_{2k}^4 \sum_{i=0}^n \vartheta_i \cdot H_0(x - x_i) \right] \cdot z_k. \quad (18)$$

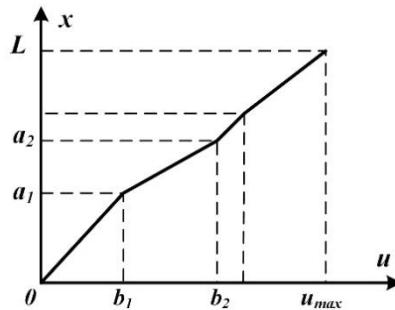
Pochodną $z_k(x)$ wyznaczamy z równania (10), podstawiając:

$$EI(x) = EI_0 \sum_{i=0}^n \xi_i \cdot H_0(x - x_i), \quad (19)$$

skąd:

$$z_k'' = \bar{M}_k \cdot \left[\sum_{i=0}^n \xi_i H_0(x - x_i) \right]^{-1}. \quad (20)$$

Równania (18) i (20) tworzą układ równoważny równaniu (7). Stosując przekształcenia za pomocą splajnu pierwszego stopnia (rys. 1), otrzymujemy dla $\bar{M}_k(x)$ i $z_k(x)$ odpowiednie równania ze stałymi współczynnikami. Przekształcenie to ma postać (21), zaś wykres tego przekształcenia przedstawiono na rysunku 1.



$$a_1 = b_1 \cdot \gamma_0,$$

$$a_2 = a_1 + (b_2 - b_1)(\gamma_3 + \gamma_0),$$

$$a_3 = a_2 + (b_3 - b_2)(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2) = b_3\gamma_0 + (b_3 - b_1)\gamma_1 + (b_3 - b_1)\gamma_2.$$

Rys. 1. Splajn pierwszego stopnia

Fig. 1. First-degree spline

Ogólnie:

$$x = u + \sum_{i=1}^n (u - b_i) \gamma_i H_0(u - b_i), \quad (21)$$

gdzie:

u – nowy argument,

przy czym:

$$u = b_i, \text{ dla } x = a_i,$$

natomiast:

$$a_1 = b_1,$$

zaś:

$$b_i = b_{i-1} + (a_i - a_{i-1}) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-1}, \quad (22)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n), (\gamma_0 = 1),$$

γ_i – parametry przekształcenia.

Pierwsza pochodna dystrybucyjna zależności (21) względem u wynosi:

$$x'_u = 1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i H_0(u - b_i) + \sum_{i=1}^n (u - b_i) \gamma_i H_1(u - b_i).$$

Drugi człon równa się zeru, ponieważ:

$$b_i \neq u \text{ dla } H_1 = 0, \text{ zaś dla } b_i = u, (u - b_i) = 0.$$

Przez $H_0, H_1, H_2 \dots$ oznaczono funkcję jednostkową i jej pochodne, czyli:

$$x'_u = 1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i H_0(u - b_i), \quad (23)$$

$$x''_u = \sum_{i=1}^n \gamma_i H_1(u - b_i), \quad (24)$$

$$x'''_u = \sum_{i=1}^n \gamma_i H_2(u - b_i). \quad (25)$$

Ponieważ $z_k = z_k(x)$, zaś $x = x(u)$, to:

$$z'_{ku} = \left[1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right] z'_{kx}, \quad (26)$$

$$z''_{ku} = \left[1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right]^2 z''_{kx} + \left[\sum_{i=1}^n \gamma_i H_1(u - b_i) \right] z'_{kx}. \quad (27)$$

Po podstawieniu z_{kx} z równania (20) do (27) mamy:

$$z''_{ku} = \left[\sum_{i=0}^n \xi_i H_0(x - a_i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right]^2 \bar{M}_k + z'_{kx} \sum_{i=1}^n \gamma_i H_1(u - b_i) \quad (28)$$

(dla $i = 0 \quad \xi = \gamma_0 = 1$).

Podobnie:

$$\bar{M}''_{ku} = \bar{M}''_{kx} \cdot (x'_u)^2 + \bar{M}'_{kx} \cdot x''_u. \quad (29)$$

Podstawiając zależności (19), (23), (24) do (29), mamy:

$$\begin{aligned} \bar{M}''_{ku} &= \left[k_{1k}^4 \sum_{i=0}^n \zeta_i H_0(x - a_i) - k_{2k}^4 \sum_{i=0}^n \vartheta_i \cdot H_0(x - a_i) \right] \cdot z_k \cdot \\ &\cdot \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right]^2 + \bar{M}'_{kx} \sum_{i=0}^n \gamma_i H_1(u - b_i) \end{aligned} \quad (30)$$

(dla $i = 0 \quad \zeta_0 = \vartheta_0 = \gamma_0 = 1; \quad a_0 = b_0 = 0$).

Oznaczając:

$$\left[\sum_{i=0}^n \zeta_i H_0(x - a_i) \right] \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right]^2 = \sum_{i=0}^n \bar{\delta}_i \cdot H_0(u - b_i) \quad (31)$$

oraz

$$\left[\sum_{i=0}^n \vartheta_i \cdot H_0(x - a_i) \right] \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right]^2 = \sum_{i=0}^n \bar{\vartheta}_i \cdot H_0(x - b_i), \quad (32)$$

otrzymujemy:

$$\bar{\delta}_i = \left(\sum_{j=0}^i \zeta_j \right) \left(\sum_{j=0}^i \gamma_j \right)^2 - \left(\sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \right) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^2, \quad (33)$$

$$\bar{\vartheta}_i = \left(\sum_{j=0}^i \vartheta_j \right) \left(\sum_{j=0}^i \gamma_j \right)^2 - \left(\sum_{j=0}^{i-1} \vartheta_j \right) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^2. \quad (34)$$

Gdy uwzględnimy dalej, że:

$$\bar{M}'_{kx} \cdot H_1(u - b_i) = \bar{M}'_{kx}(a_i) \cdot H_1(u - b_i), \quad (35)$$

równanie (30) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \bar{M}''_{ku} &= k_{1k}^4 \left[\sum_{i=0}^n \bar{\delta}_i H_0(u - b_i) \right] z_k - k_{2k}^4 \left[\sum_{i=0}^n \bar{\vartheta}_i \cdot H_0(u - b_i) \right] z_k + \\ &+ \sum_{i=0}^n \bar{M}'_{kx}(a_i) \cdot \gamma_i \cdot H_1(u - b_i), \end{aligned} \quad (36)$$

zaś

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ku}''' = & k_{1k}^4 \left[\sum_{i=0}^n \bar{\delta}_i H_0(u - b_i) \right] z'_{ku} + k_{1k}^4 \sum_{i=1}^n z_k(a_i) \bar{\vartheta}_i H_1(u - b_i) + \\ & - k_{2k}^4 \left[\sum_{i=0}^n \bar{\vartheta}_i H_0(u - b_i) \right] z'_{ku} - k_{2k}^4 \sum_{i=1}^n z_k(a_i) \bar{\vartheta}_i H_1(u - b_i) + \\ & + \sum_{i=1}^n \bar{M}'_{kx}(a_i) \gamma_i H_2(u - b_i). \end{aligned} \quad (37)$$

Po podstawieniu z_{ku} z równania (26) mamy:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ku}''' = & k_{1k}^4 \left[\sum_{i=0}^n \bar{\delta}_i H_0(u - b_i) \right] \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right] z'_k + \\ & + k_{1k}^4 \sum_{i=1}^n z_k(a_i) \bar{\delta}_i H_1(u - b_i) - k_{2k}^4 \left[\sum_{i=0}^n \bar{\vartheta}_i H_0(u - b_i) \right] \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right] z'_{kx} + \\ & + k_{2k}^4 \sum_{i=1}^n z_k(a_i) \bar{\vartheta}_i H_1(u - b_i) + \sum_{i=1}^n \bar{M}'_{kx}(a_i) \gamma_i H_2(u - b_i). \end{aligned} \quad (38)$$

Oznaczając z kolei

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=0}^n \bar{\delta}_i H_0(u - b_i) \right] \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right] = \left[\sum_{i=0}^n \bar{\psi}_i H_0(u - b_i) \right] \quad (39) \\ (\bar{\delta}_0 = \gamma_0 = \bar{\psi}_0 = 1; \quad b_0 = 0), \end{aligned}$$

skąd

$$\bar{\psi}_i = \left(\sum_{j=0}^i \bar{\delta}_j \right) \left(\sum_{j=0}^i \gamma_j \right) - \left(\sum_{j=0}^{i-1} \bar{\delta}_j \right) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right) \quad (40)$$

oraz

$$\left[\sum_{i=0}^n \bar{\vartheta}_i H_0(u - b_i) \right] \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right] = \sum_{i=0}^n \bar{\zeta}_i H_0(u - b_i), \quad (41)$$

$$\bar{\zeta}_i = \left(\sum_{j=0}^i \bar{\vartheta}_j \right) \left(\sum_{j=0}^i \gamma_j \right) - \left(\sum_{j=0}^{i-1} \bar{\vartheta}_j \right) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right), \quad (42)$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ku}''' = & \left[\sum_{i=0}^n \bar{\psi}_i H_0(u - b_i) \right] z'_{kx} + k_{1k}^4 \sum_{i=1}^n z_k(a_i) \bar{\delta}_i H_1(u - b_i) + \\ & - k_{2k}^4 \left[\sum_{i=0}^n \bar{\zeta}_i H_0(u - b_i) \right] z'_{kx} - k_{2k}^4 \sum_{i=1}^n z_k(a_i) \bar{\vartheta}_i H_1(u - b_i) + \\ & + \sum_{i=1}^n \bar{M}'_{kx}(a_i) \gamma_i H_2(u - b_i). \end{aligned} \quad (43)$$

Czwarta pochodna ma postać:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ku}^{IV} = & k_{1k}^4 \left\{ \left[\sum_{i=0}^n \bar{\psi}_i H_0(u - b_i) \right] \frac{d}{du} (z'_{kx}) + \sum_{i=1}^n z'_{kx}(a_i) \bar{\psi}_i H_1(u - b_i) \right\} + \\ & - k_{2k}^4 \left\{ \left[\sum_{i=0}^n \bar{\zeta}_i H_0(u - b_i) \right] \frac{d}{du} (z'_{kx}) + \sum_{i=1}^n z'_{kx}(a_i) \bar{\zeta}_i H_1(u - b_i) \right\} + \\ & + k_{1k}^4 \sum_{i=1}^n z_k(a_i) \bar{\delta}_i H_2(u - b_i) - k_{2k}^4 \sum_{i=1}^n z_k(a_i) \bar{\vartheta}_i H_2(u - b_i) + \\ & + \sum_{i=1}^n \bar{M}'_{kx}(a_i) \gamma_i H_3(u - b_i), \end{aligned} \quad (44)$$

gdzie biorąc pod uwagę (26):

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} (z'_{kx}) = & \left\{ z''_{ku} \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) - z'_{ku} \sum_{i=0}^n \gamma_i H_1(u - b_i) \right] \right\} \cdot \\ & \cdot \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right]^{-2}, \end{aligned} \quad (45)$$

zaś z''_{ku} po wstawieniu (20) do (27) ma postać:

$$z''_{ku} = \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right]^2 \left[\sum_{i=0}^n \xi_i H_0(x - a_i) \right]^{-1} \bar{M}'_k + \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_1(u - b_i) \right] z'_{kx}, \quad (46)$$

zatem:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}(z'_{kx}) = & \left\{ \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right]^2 \left[\sum_{i=0}^n \xi_i H_0(x - a_i) \right]^{-1} \bar{M}_k + \right. \\ & + \left. \left[\sum_{i=1}^n \gamma_i H_1(u - b_i) z'_{kx} \right] \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right]^{-1} + \right. \\ & \left. - z'_{ku} \left[\sum_{i=1}^n \gamma_i H_1(u - b_i) \right] \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right]^{-2} \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Po uwzględnieniu zależności (26) i uporządkowaniu otrzymamy:

$$\frac{d}{du}(z'_{kx}) = \left[\sum_{i=0}^n \gamma H_0(u - b_i) \right] \left[\sum_{i=0}^n \xi_i H_0(x - a_i) \right]^{-1} \bar{M}_k. \quad (48)$$

Natomiast po podstawieniu do (44):

$$\begin{aligned} \bar{M}'_{ku} = & k_{1k}^4 \left\{ \left[\sum_{i=0}^n \bar{\psi}_i H_0(u - b_i) \right] \cdot \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right] \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left[\sum_{i=0}^n \xi_i H_0(x \pm a_i) \right]^{-1} \bar{M}_k + \sum_{i=1}^n z'_{kx}(a_i) \bar{\psi}_i H_1(u - b_i) \right\} + \\ -k_{2k}^4 & \left\{ \left[\sum_{i=0}^n \bar{\xi}_i H_0(u - b_i) \right] \cdot \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right] \cdot \left[\sum_{i=0}^n \xi_i H_0(x - a_i) \right]^{-1} \bar{M}'_k + \right. \\ & + \sum_{i=1}^n z'_{kx}(a_i) \bar{\zeta}_i H_1(u - b_i) \left. \right\} + k_{1k}^4 \sum_{i=1}^n z_k(a_i) \bar{\delta}_i H_2(u - b_i) + \\ & - k_{2k}^4 \sum_{i=1}^n z_k(a_i) \bar{\vartheta}_i H_2(u - b_i) + \sum_{i=0}^n \bar{M}'_k(a_i) \gamma_i H_3(u - b_i). \end{aligned} \quad (49)$$

Podobnie jak poprzednio mamy warunek:

$$\left[\sum_{i=0}^n \bar{\psi}_i H_0(u - b_i) \right] \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right] = \sum_{i=0}^n \xi_i H_0(x - a_i), \quad (50)$$

stąd

$$\gamma_i = \left(\sum_{j=0}^i \xi_j \right)^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{j=0}^i \zeta_j \right)^{-\frac{1}{4}} + \left(\sum_{j=0}^{i-1} \xi_j \right)^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \right)^{-\frac{1}{4}} \quad (51)$$

oraz

$$\left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right] \left[\sum_{i=0}^n \bar{\zeta}_i H_0(u - b_i) \right] = \sum_{i=0}^n \xi_i H_0(x - a_i). \quad (52)$$

Funkcje z_k i z'_{kx} występujące w równaniu (49) można wyznaczyć przez \bar{M}'_{kx} i \bar{M}'''_{kx} , biorąc za a_i ($a_i = 0$) lub ($a_i + 0$). W tym celu do równania (30) podstawimy zależność (19). Otrzymamy:

$$\bar{M}''_{ku} = \bar{M}''_{kx} \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right]^2 + \bar{M}'_{kx} \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_1(u - b_i) \right]. \quad (53)$$

Po zróżniczkowaniu względem u mamy:

$$\begin{aligned} \bar{M}'''_{ku} &= \bar{M}'''_{kx} \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right]^3 + 3\bar{M}''_{kx} \left[\sum_{i=0}^n \gamma_i H_0(u - b_i) \right] \cdot \\ &\cdot \left[\sum_{i=1}^n \gamma_i H_1(u - b_i) \right] + \sum_{i=1}^n \bar{M}'_{kx}(a_i) \gamma_i H_2(u - b_i). \end{aligned} \quad (54)$$

Ponieważ $u = b_i$, przy $x = a_i$, biorąc $a_{i=0}$ za a_i , podstawiamy do równania (53), które w tym celu należy zapisać w postaci:

$$\bar{M}''_{ku}(u) = \bar{M}''_{kx}(x) \left[\sum_{j=0}^n \gamma_j H_0(u - b_j) \right]^2 + \sum_{j=1}^n \bar{M}'_{kx}(a_j) \gamma_j H_1(u - b_j); \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}''_{ku}(b_i - 0) &= \bar{M}''_{kx}(a_i - 0) \left[\sum_{j=\delta}^n \gamma_j H_0(b_i - 0 - b_j) \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^n \bar{M}'_{kx}(a_j) \gamma_j H_1(b_i - 0 - b_j), \end{aligned} \quad (56)$$

przy czym:

$$H_0(b_i - 0 - b_j) = \begin{cases} 1 & \text{przy } i > j \\ 0 & \text{przy } i < j, \\ 0 & \text{przy } i = j \end{cases} \quad (57)$$

czyli

$$\bar{M}''_{kx}(a_i - 0) = \bar{M}''_{ku}(b_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-2} \quad (58)$$

Zapisując równanie (18) w postaci:

$$\bar{M}''_{kx} = \left[k_{1k}^4 \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \cdot H_0(x - a_j) - k_{2k}^4 \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \vartheta_j \cdot H_0(x - a_j) \right] z_k \quad (59)$$

i podstawiając $a_i - 0$ za x , otrzymujemy:

$$k_{1k}^4 \cdot z_k(a_i - 0) \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j - k_{2k}^4 \cdot z_k(a_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \vartheta_j \right) = \bar{M}''_{kx}(a_i - 0) \quad (60)$$

oraz

$$k_{1k}^4 \cdot z'_{kx}(a_i - 0) \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j - k_{2k}^4 \cdot z'_{kx}(a_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \vartheta_j \right) = \bar{M}'''_{kx}(a_i - 0). \quad (61)$$

Po podstawieniu $\bar{M}'''_{kx}(a_i - 0)$ z (58) do (60) mamy:

$$\begin{aligned} k_{1k}^4 \cdot z_k(a_i - 0) \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j - k_{2k}^4 \cdot z_k(a_i - 0) \sum_{j=0}^{i-1} \vartheta_j &= \\ &= \bar{M}''_{ku}(b_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-2}, \end{aligned} \quad (62)$$

ponieważ

$$\bar{M}'_{ku} = \bar{M}'_{kx} \sum_{i=0}^n \gamma_i \cdot H_0(u - b_i). \quad (63)$$

Po podstawieniu jak wyżej:

$$\bar{M}'_{kx}(a_i - 0) = \bar{M}'_{ku}(b_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-1}. \quad (64)$$

Zapisując równanie (54), podobnie jak (56), i podstawiając $(b_i - 0)$ za u , otrzymujemy

$$\bar{M}''''_{ku}(b_i - 0) = \bar{M}''''_{kx}(a_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^3, \quad (65)$$

co po podstawieniu do (61) daje:

$$\left[k_{1k}^4 \sum_{j=0}^{i-1} \varsigma_j - k_{2k}^4 \sum_{j=0}^{i-1} \xi_j \right] z'_{kx}(a_i - 0) = \bar{M}''''_{ku}(b_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-3}. \quad (66)$$

Następnie po podstawieniu zależności (50) i (52) do (49) mamy:

$$\begin{aligned} \bar{M}^{IV}_{ku} &= k_{1k}^4 \left[\bar{M}_k + \sum_{i=1}^n z'_{kx}(a_i) \bar{\psi}_i H_1(u - b_i) \right] + \\ &+ k_{2k}^4 \left[\bar{M}_k + \sum_{i=1}^n z'_{kx}(a_i) \bar{\zeta}_i H_1(u - b_i) \right] + \\ &+ k_{1k}^4 \sum_{i=1}^n z_k(a_i) \bar{\delta}_i H_2(u - b_i) - k_{2k}^4 \sum_{i=1}^n z_k(a_i) \bar{\vartheta}_i H_2(u - b_i) + \\ &+ \sum_{i=0}^n \bar{M}'_{kx}(a_i) \gamma_i H_3(u - b_i). \end{aligned} \quad (67)$$

Po uporządkowaniu i wstawieniu za a_i ($a_i - 0$) mamy:

$$\begin{aligned} \bar{M}^{IV}_{ku} &= \bar{M}_k(k_{1k}^4 - k_{2k}^4) + z'_{kx}(a_i - 0) \cdot \\ &\cdot \left[k_{1k}^4 \sum_{i=1}^n \bar{\psi}_i \cdot H_1(u - b_i) - k_{2k}^4 \sum_{i=1}^n \bar{\zeta}_i \cdot H_1(u - b_i) \right] + \\ &+ z_k(a_i - 0) \left[k_{1k}^4 \sum_{i=1}^n \bar{\delta}_i \cdot H_2(u - b_i) - k_{2k}^4 \sum_{i=1}^n \bar{\vartheta}_i H_2(u - b_i) \right] + \\ &+ \sum_{i=0}^n \bar{M}'_{kx}(a_i - 0) \gamma_i H_3(u - b_i). \end{aligned} \quad (68)$$

Występujące w tym równaniu wielkości $z'_{kx}(a_i - 0)$ oraz $z_k(a_i - 0)$ wyznaczamy z równań (66) i (62):

$$z'_{kx}(a_i - 0) = \bar{M}'_{ku}(b_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-3} \left[k_{1k}^4 \sum_{j=0}^{i-1} \bar{\zeta}_j - k_{2k}^4 \sum_{j=0}^{i-1} \vartheta_j \right]^{-1} \quad (69)$$

$$(\gamma_0 = \zeta_0 = \vartheta_0 = 1),$$

$$z_k(a_i - 0) = \bar{M}''_{ku}(b_i - 0) \left(\sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j \right)^{-2} \cdot \left[k_{1k}^4 \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j - k_{2k}^4 \sum_{j=0}^{i-1} \vartheta_j \right]^{-1} \quad (70)$$

i wstawimy wraz z (64) do (68). Zatem:

$$\begin{aligned} \bar{M}'_{ku} &= (k_{1k}^4 - k_{2k}^4) \bar{M}_k + \bar{M}''_{ku}(b_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-3} \cdot \left[k_{1k}^4 \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j - k_{2k}^4 \sum_{j=0}^{i-1} \vartheta_j \right]^{-1} \cdot \\ &\cdot \left[k_{1k}^4 \sum_{i=1}^n \bar{\psi}_i \cdot H_1(u - b_i) - k_{2k}^4 \sum_{i=1}^n \bar{\zeta}_i \cdot H_1(u - b_i) \right] + \\ &+ \bar{M}''_{ku}(b_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-2} \left[k_{1k}^4 \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j - k_{2k}^4 \sum_{j=0}^{i-1} \vartheta_j \right]^{-1} \cdot \\ &\cdot \left[k_{1k}^4 \sum_{i=1}^n \bar{\delta}_i \cdot H_2(u - b_i) - k_{2k}^4 \sum_{i=1}^n \bar{\vartheta}_i \cdot H_2(u - b_i) \right] + \\ &+ \bar{M}'_{ku}(b_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot H_3(u - b_i). \end{aligned} \quad (71)$$

Gdy oznaczymy:

$$\left[k_{1k}^4 \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j - k_{2k}^4 \sum_{j=0}^{i-1} \vartheta_j \right]^{-1} = A_k,$$

równanie (71) przyjmie postać:

$$\bar{M}'_{ku} - (k_{1k}^4 - k_{2k}^4) \bar{M}_k(u) = \sum_{i=1}^n \bar{M}''_{ku}(b_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-3} A_k \cdot$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[k_{1k}^4 \sum_{i=1}^n \bar{\psi}_i \cdot H_1(u - b_i) - k_{2k}^4 \sum_{i=1}^n \bar{\zeta}_i \cdot H_1(u - b_i) \right] + \\
& \quad + \sum_{i=0}^n \bar{M}_{ku}''(b_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-2} A_k \cdot \\
& \cdot \left[k_{1k}^4 \sum_{i=1}^n \bar{\delta}_i \cdot H_2(u - b_i) - k_{2k}^4 \sum_{i=1}^n \bar{\vartheta}_i \cdot H_2(u - b_i) \right] + \\
& \quad + \sum_{i=0}^n \bar{M}_{ku}'(b_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-1} \gamma_j \cdot H_3(u - b_i). \tag{72}
\end{aligned}$$

Gdy wprowadzimy oznaczenia:

$$K_{ri} = \varepsilon_{ri} \bar{M}_{ku}^{(r)}(b_i - 0); \quad (r = 1, 2, 3), \tag{73}$$

zależność (72) zapiszemy w postaci:

$$\bar{M}_{ku}'^v - (k_{1k}^4 - k_{2k}^4) \bar{M}_k(u) = \sum_{r=1}^3 \sum_{i=1}^n K_{ri} H_{4-r}(u - b_i), \tag{74}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{1i} &= \gamma_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-1}, \\
\varepsilon_{2i} &= A_k \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-2} \sum_{i=1}^n (k_{1k}^4 \cdot \bar{\delta}_i - k_{2k}^4 \cdot \bar{\vartheta}_i), \\
\varepsilon_{3i} &= A_k \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-3} \sum_{i=1}^n (k_{1k}^4 \bar{\psi}_i - k_{2k}^4 \bar{\zeta}_i). \tag{75}
\end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę związki (33), (34), (40), (42), (51), (52), otrzymamy:

$$A_k = \left[(k_{1k}^4 - k_{2k}^4) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \right)^{-1} \right] = \left[k_k^4 \sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \right]^{-1}, \tag{76}$$

gdzie

$$k_k^4 = k_{1k}^4 - k_{2k}^4.$$

Zależności (75) przyjmą postać:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1i} &= \gamma_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-1}, \\ \varepsilon_{2i} &= \left[1 + \zeta_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \right)^{-1} \right] \left[1 + \gamma_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-1} \right]^2 - 1, \\ \varepsilon_{3i} &= \left[1 + \zeta_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \right)^{-1} \right] \left[1 + \gamma_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-1} \right]^3 - 1, \end{aligned} \quad (77)$$

(dla $j = 0$ $\zeta_0 = \gamma_0 = 1$), natomiast γ_i liczymy wg (51), co po podstawieniu do (77) daje:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1i} &= \left(\sum_{j=0}^i \xi_j \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\sum_{j=0}^{i-1} \xi_j \right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(\sum_{j=0}^i \zeta_j \right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(\sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \right)^{\frac{1}{4}} - 1, \\ \varepsilon_{2i} &= \left(\sum_{j=0}^i \xi_j \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \xi_j \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=0}^i \zeta_j \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \right)^{-\frac{1}{2}} - 1, \\ \varepsilon_{3i} &= \left(\sum_{j=0}^i \xi_j \right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\sum_{j=0}^{i-1} \xi_j \right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\sum_{j=0}^i \zeta_j \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\sum_{j=0}^{i-1} \zeta_j \right)^{-\frac{1}{4}} - 1. \end{aligned} \quad (78)$$

Równanie (74) można rozwiązać, stosując przekształcenie Laplace'a-Carsona. Gdy oznaczymy przez $\bar{M}_k(p)$ obraz i $M_k(u)$ oryginał, czyli $M_k(u) \rightarrow \bar{M}_k(p)$, równanie (74) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} & p^4 \bar{M}_k(p) - p^4 M_k(0) - p^3 M_k'(0) - p^2 M_k''(0) - p M_k'''(0) - k_k^4 \bar{M}_k(p) = \\ &= \sum_{i=0}^n K_{1i} \cdot p^3 \exp(-pu_i) + \sum_{i=0}^n K_{2i} \cdot p^2 \exp(-pu_i) + \sum_{i=0}^n K_{3i} \cdot p \exp(-pu_i), \end{aligned}$$

skąd:

$$\bar{M}_k(p) = \frac{1}{p^4 - k_k^4} \left[\sum_{r=0}^3 p^{(4-r)} M_k^{(r)}(0) + \sum_{r=1}^3 \sum_{i=0}^n K_{ri} \cdot p^{(4-r)} \exp(-pu_i) \right]. \quad (79)$$

Stosując odwrotne przekształcenie Laplace’a-Carsona, mamy:

$$\frac{p^{4-r}}{p^4 - k_k^4} \rightarrow Y_r(u), \quad (80)$$

$$(r = 0, 1, 2, 3),$$

zaś

$$\frac{p^{(4-r)} \exp(-pu_i)}{p^4 - k_k^4} \rightarrow Y_r(u - u_i) H_0(u - u_i), \quad (81)$$

gdzie:

Y_r – funkcje Kryłowa [8].

Rozwiązanie równania (79) ma więc postać:

$$\bar{M}_k(u) = \sum_{r=0}^3 M_k^{(r)}(0) Y_r(u) + \sum_{r=1}^3 \sum_{i=0}^n \varepsilon_{ri} \cdot \bar{M}_{ku}^{(r)}(b_i - 0) Y_r(u - u_i) H_0(u - u_i). \quad (82)$$

Równanie (82) można przekształcić, rugując parametry pośrednie $\bar{M}_{ku}^{(r)}(b_i - 0)$ będące jednorodnymi liniowymi funkcjami parametrów brzegowych $\bar{M}_k^{(r)}(0)$. W tym celu będzie wygodnie zmienić indeks r w pierwszym członie równania (82), przepisując je w postaci:

$$\bar{M}_k(u) = \sum_{s=0}^3 \bar{M}_k^{(s)}(0) Y_s(u) + \sum_{r=1}^3 \sum_{i=0}^n \varepsilon_{ri} \bar{M}_{ku}^{(r)}(b_i - 0) Y_r(u - u_i) H_0(u - u_i). \quad (83)$$

Parametry pośrednie wyznaczamy:

$$\bar{M}_{ku}^{(r)}(b_i - 0) = \sum_{s=0}^3 \bar{M}_k^{(s)}(0) C_{irs} \quad (84)$$

$$(r = 1, 2, 3).$$

Ponieważ

$$\bar{M}_{ku}^{(r)} \Big|_{u=b_i-0} = \bar{M}_{ku}^{(r)}(b_i - 0), \quad (85)$$

na podstawie (84) można zapisać:

$$\bar{M}_{ku}^{(r)}(b_i - 0) = \sum_{s=0}^3 \bar{M}_k^{(s)}(0) Y_{su}^{(r)}(b_i) + \sum_{s=1}^3 \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_{sj} \bar{M}_{ku}^{(s)}(b_j - 0) Y_{su}^{(r)}(b_i - b_j). \quad (86)$$

Podobnie:

$$\bar{M}_{ku}^{(s)}(b_j - 0) = \sum_{r=0}^3 \bar{M}_k^{(r)}(0) Y_{ru}^{(s)}(b_j) + \sum_{p=1}^3 \sum_{k=1}^{j-1} \varepsilon_{pk} \cdot C_{kpr} \cdot Y_{pu}^{(s)}(b_j - b_k), \quad (87)$$

przy czym:

$$\bar{M}_{ku}^{(s)}(b_j - 0) = \sum_{r=0}^3 \bar{M}_k^{(r)}(0) C_{jsr}, \quad (88)$$

czyli:

$$C_{jsr} = Y_{ru}^{(s)}(b_j) + \sum_{p=1}^3 \sum_{k=1}^{j-1} \varepsilon_{pk} \cdot C_{kpr} \cdot Y_{pu}^{(s)}(b_j - b_k). \quad (89)$$

Zaś

$$C_{irs} = Y_{su}^{(r)}(b_i) + \sum_{s=1}^3 \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_{sj} \cdot C_{jsr} \cdot Y_{su}^{(r)}(b_i - b_j). \quad (90)$$

Rozwiązania równania (74) można więc zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \bar{M}_k(u) &= \sum_{s=0}^3 \bar{M}_k^{(s)}(0) Y_s(u) + \\ &+ \sum_{s=0}^3 \sum_{r=1}^3 \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ri} \cdot \bar{M}_k^{(s)}(0) C_{irs} \cdot Y_r(u - b_i) H_0(u - b_i), \end{aligned} \quad (91)$$

lub

$$\bar{M}_k(u) = \sum_{s=0}^3 \bar{M}_k^{(s)}(0) V_s(u),$$

gdzie:

$$V_s(u) = Y_s(u) + \sum_{r=1}^3 \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ri} \cdot C_{irs} \cdot Y_r(u - b_i) H_0(u - b_i). \quad (92)$$

Warunki brzegowe mają postać:

$$\begin{aligned} \bar{M}_k(0) &= \bar{M}'_k(0) = 0, \\ \bar{M}_k(b) &= \bar{M}'_k(b) = 0. \end{aligned} \quad (93)$$

Na podstawie zależności (91) mamy więc:

$$\bar{M}_k(u) = \bar{M}''_k(0)V_2(u) + \bar{M}'''_k(0)V_3(u),$$

a następnie:

$$\begin{aligned} \bar{M}_k(b) &= \bar{M}'_k(0)V_2(b) + \bar{M}'''_k(0)V_3(b) = 0, \\ \bar{M}'_k(b) &= \bar{M}'_k(0)V'_2(b) + \bar{M}'''_k(0)V'_3(b) = 0. \end{aligned} \quad (95)$$

Wartości własne znajdziemy z wyznacznika:

$$V_2(b) V'_3(b) - V'_2(b) V_3(b) = 0, \quad (96)$$

zaś funkcje własne na podstawie (93) i (94):

$$\bar{M}_k(u) = A[V_2(u)V_3(b) - V_3(u)V_2(b)], \quad (97)$$

gdzie:

$$A = \frac{\bar{M}''_k(0)}{V_3(b)}$$

to stała dowolna.

Przejdźcie do współrzędnej x wykonujemy przez odwrócenie splajnu (21):

$$u = x + \sum_{i=1}^n (x - x_i) x_i \cdot H_0(x - x_i). \quad (98)$$

Ponieważ:

$$\left[1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot H_0(u - u_i) \right] \left[1 + \sum_{i=1}^n X_i \cdot H_0(x - x_i) \right] = 1, \quad (99)$$

to dla

$$\begin{aligned} u_1 &< u < u_2, & x_1 &< x < x_2, \\ u_2 &< u < u_3, & x_2 &< x < x_3 \end{aligned}$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned}\chi_1 &= -\gamma_1(1 + \gamma_1)^{-1}, \\ \chi_2 &= -\gamma_2(1 + \gamma_2)^{-1}(1 + \gamma_1 + \gamma_2)^{-1},\end{aligned}$$

dla dowolnego i

$$\begin{aligned}\chi_i &= -\gamma_1 \left(\sum_{j=0}^i \gamma_j \right)^{-1} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-1} \\ &(\gamma_0 = 1).\end{aligned}\tag{100}$$

W podobny sposób, drogą dość znużonych przekształceń, można wyznaczyć funkcje własne $z_k(x)$. Dystrybucyjne równanie różniczkowe w tym przypadku, podobnie jak (72), ma postać:

$$\begin{aligned}z_{ku}^{IV} - (k_{1k}^4 - k_{2k}^4)z_k &= \\ &= z_{ku}'''(b_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \xi_j \right) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-3} \sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_i H_1(u - b_i) + \\ &+ z_{ku}''(b_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \xi_j \right) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-2} \sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_i \cdot H_2(u - b_i) + \\ &+ z_{ku}'(b_i - 0) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \gamma_j \cdot H_3(u - b_i)\end{aligned}\tag{101}$$

Oznaczając:

$$\begin{aligned}\bar{K}_{ri} &= \bar{\varepsilon}_{ri} z_{ku}^{(r)}(b_i - 0), \\ &(r = 1, 2, 3),\end{aligned}\tag{102}$$

równanie (101) napiszemy w postaci:

$$z_{ku}^{IV} - k_k^4 \cdot z_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{i=1}^n \bar{K}_{ri} \cdot H_{4-r}(u - b_i),\tag{103}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{1i} &= \gamma \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-1}, \\ \bar{\varepsilon}_{2i} &= \left[1 - \xi_i \left(\sum_{j=0}^i \xi_j \right)^{-1} \right] \left[1 + \gamma_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-1} \right]^2 - 1, \\ \bar{\varepsilon}_{3i} &= \left[1 - \xi_i \left(\sum_{j=0}^i \xi_j \right)^{-1} \right] \left[1 + \gamma_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \right)^{-1} \right]^3 - 1,\end{aligned}\quad (104)$$

przy czym dla $j=0$ $\xi_0 = \gamma_0 = 1$.

Wykorzystując zaś (51), mamy ostatecznie:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{1i} &= \left(\sum_{j=0}^i \xi_j \right)^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \xi_j \right)^{-\frac{1}{4}} \left(\sum_{j=0}^i \varsigma_j \right)^{-\frac{1}{4}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \varsigma_j \right)^{\frac{1}{4}} - 1, \\ \bar{\varepsilon}_{2i} &= \left(\sum_{j=0}^i \xi_j \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \xi_j \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^i \varsigma_j \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \varsigma_j \right)^{\frac{1}{2}} - 1, \\ \bar{\varepsilon}_{3i} &= \left(\sum_{j=0}^i \xi_j \right)^{-\frac{3}{4}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \xi_j \right)^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{j=0}^i \varsigma_j \right)^{-\frac{3}{4}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \varsigma_j \right)^{\frac{3}{4}} - 1.\end{aligned}\quad (105)$$

Jak widać z porównania wzorów (78) oraz (105), mamy następujące zależności:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{1i} &= \varepsilon_{1i}, \\ \bar{\varepsilon}_{2i} &= (\varepsilon_{2i} + 1)^{-1} - 1, \\ \bar{\varepsilon}_{3i} &= \bar{\alpha}_i (\varepsilon_{3i} + 1) - 1,\end{aligned}\quad (106)$$

przy czym:

$$\bar{\alpha}_i = \left(\sum_{j=0}^i \xi_j \right)^{-1} \left(\sum_{j=0}^i \varsigma_j \right)^{-1} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \xi_j \right) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \varsigma_j \right).$$

Stosując jak poprzednio przekształcenie Laplace'a-Carsona, otrzymamy rozwiązanie równania (103) w postaci:

$$z_k(u) = \sum_{r=0}^3 z_k^{(r)}(0)Y_r(u) + \sum_{r=1}^3 \sum_{i=1}^n \bar{K}_{ri} \cdot Y_r(u - u_i)H_o(u - u_i). \quad (107)$$

Parametry pośrednie $z_{ku}^{(r)}$ ($b_i - 0$) w równaniu (107) wyznaczamy podobnie jak w równaniach (84) do (92) i w rezultacie otrzymamy:

$$z_k(u) = \sum_{s=0}^3 z_k^{(s)}(0)\bar{V}_s(u), \quad (108)$$

$$V_s(u) = Y_s(u) + \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_{ri} \cdot \bar{C}_{irs} Y_r(u - b_i)H_o(u - b_i) \quad (109)$$

($s = 0, 1, 2, 3$).

$\bar{\varepsilon}_{ri}$ wyznaczają zależności (104)–(106), zaś \bar{C}_{irs} liczymy podobnie jak C_{jsr} (89):

$$\bar{C}_{jrs} = Y_{ru}^{(s)}(b_j) + \sum_{p=1}^3 \sum_{k=1}^{j-1} \bar{\varepsilon}_{pk} \cdot \bar{C}_{kpr} \cdot Y_{pu}^{(s)}(b_j - b_k). \quad (110)$$

Warunki brzegowe wynikają z zerowania się momentów gnących i sił tnących na końcach belki:

$$\begin{aligned} z_k''(0) &= z_k'''(0) = 0 \text{ dla } u = 0, \\ z_k''(u_{\max}) &= z_k'''(u_{\max}) = 0 \text{ dla } u = u_{\max}. \end{aligned} \quad (111)$$

Wykorzystując powyższe warunki, równanie (108) zapisujemy:

$$z_k(u) = z_k(0)\bar{V}_0(u) + z_k'(0)\bar{V}_1(u), \quad (112)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \bar{V}_0(u) &= Y_r(u) + \sum_{r=1}^3 \sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_{ri} \cdot \bar{C}_{iro} \cdot Y_r(u - b_i)H_o(u - b_i), \\ \bar{V}_1(u) &= Y_1(u) + \sum_{r=1}^3 \sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_{ri} \cdot \bar{C}_{ir1} \cdot Y_r(u - b_i)H_o(u - b_i). \end{aligned}$$

Na podstawie (112):

$$z_k''(u_{\max}) = z_k(0)\bar{V}_0''(u_{\max}) + z_k'(0)\bar{V}_1''(u_{\max}) = 0, \quad (113)$$

$$z_k'''(u_{\max}) = z_k(0)\bar{V}_0'''(u_{\max}) + z_k'(0)\bar{V}_1'''(u_{\max}) = 0. \quad (114)$$

Wartości własne obliczamy z wyznacznika:

$$\bar{V}_0''(u_{\max})\bar{V}_1'''(u_{\max}) - \bar{V}_0'''(u_{\max})\bar{V}_1''(u_{\max}) = 0. \quad (115)$$

Równie dobrze można zapisać wyznacznik na podstawie warunków brzegowych (91):

$$V_2(u_{\max})V_3'(u_{\max}) - V_2'(u_{\max})V_3(u_{\max}) = 0. \quad (116)$$

Zależność $\bar{V}_s(u)$ wyraża się wzorem (109). Po obliczeniu wartości własnych λ_k z równania (115) lub (116) otrzymujemy zależności na funkcje własne. Po wykorzystaniu (113) równanie (112) przyjmie postać:

$$z_k(u) = z_k(0) \left[\bar{V}_0(u) - \frac{\bar{V}_0''(u_{\max})}{\bar{V}_2'(u_{\max})} \cdot \bar{V}_1(u) \right], \quad (117)$$

$$z_k(u) = H[\bar{V}_0(u)\bar{V}_1''(u_{\max}) - \bar{V}_1(u)\bar{V}_0''(u_{\max})], \quad (118)$$

gdzie:

$$H = \frac{z_k(0)}{\bar{V}_1''(u_{\max})} - \text{stała dowolna.}$$

Przejście do współrzędnej x można łatwo wykonać wg zależności (98) i (100).

2. PRZYKŁADY LICZBOWE

Korzystając z danych liczbowych przedstawionych w pracy [2], obliczono wartości drgań własnych kadłuba statku przedstawioną metodą analityczną (MA) oraz metodą sztywnych elementów skończonych (SES) [13] (Program HESAC-PC).

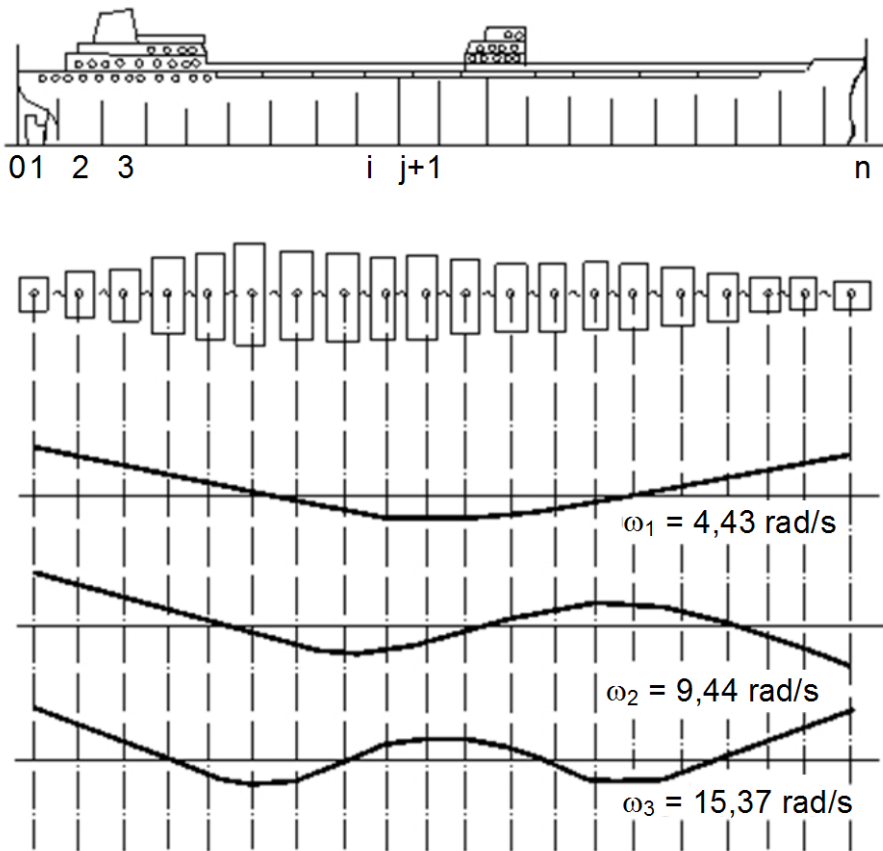
Dane liczbowe dla obu metod zestawiono w tabelach 1 i 2, zaś obliczenia – w tabeli 3.

Tabela 1. Współczynniki zmiany sztywności i masy do przykładu 1 (metoda MA)
Table 1. The rates of change of rigidity and mass in the example 1 (the analytical method)

Nr odcinka kadłuba	x_i	ξ_i	ζ_i	ζ_i	ζ_i
	–	–	1. forma	2. forma	3. forma
	m	–	–	–	–
1	11,811	3,4174	3,2133	3,1451	3,0777
2	23,622	7,2869	3,3709	3,1820	2,9956
3	35,433	4,3565	2,9450	2,7982	2,6545
4	47,244	2,6435	4,1710	4,0168	3,8643
5	59,055	-0,9652	12,6566	12,6943	12,7331
6	70,860	0,5739	1,1735	1,1317	1,0877
7	82,677	0,1217	-2,8397	-2,8976	-2,9548
8	94,488	0,0000	-3,7867	-3,8408	-3,8947
9	106,299	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	118,011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
11	129,921	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
12	141,732	3,3478	3,0905	3,1456	3,2044
13	153,543	-2,3478	1,0150	1,0411	1,0669
14	165,354	-1,0000	-1,3282	-1,3068	-1,2856
15	177,165	-0,5217	-5,1189	-5,0807	-5,0437
16	188,976	-1,0869	-2,0243	-1,9103	-1,7974
17	200,787	-2,0000	-2,9520	-2,7497	-2,5497
18	212,598	-4,6000	-9,8276	-9,7105	-9,5953
19	224,409	6,4348	-3,8365	-3,7615	-3,6879
20	236,022	–	–	–	–

Tabela 2. Współczynniki zmiany sztywności i masy do przykładu 2 (metoda SES)
Table 2. The rates of change of rigidity and mass in the example 2 (the Rigid FEM)

Nr odcinka kadłuba	Masa odcinka kadłuba z wodą towarzyszącą przy liczbie węzłów:			Moment bezwładności przekroju poprzecznego	k_1	k_6
	2	3	4			
	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$		$\times 10^{-10}$	$\times 10^{-11}$
	kg	kg	kg		m^4	N/m
1	439,7	433,5	427,5	11,5	0,12802	2,0447
2	1852,6	1769,9	1743,2	50,8	0,50317	9,0323
3	3334,8	3176,3	3023,8	134,6	1,15570	23,9319
4	4629,7	4389,6	4158,6	84,7	1,61798	32,8397
5	6463,7	6130,9	5810,6	215,1	1,94513	38,2448
6	12028,8	11633,9	11254,0	204,0	1,79578	36,2713
7	12545,8	12124,5	11719,0	210,6	1,84557	37,4447
8	11297,2	10868,4	10455,8	212,0	1,85624	37,6937
9	9632,2	9203,4	8790,8	212,0	1,85624	37,6937
10	9632,2	9203,4	8790,8	212,0	1,85624	37,6937
11	9632,2	9203,4	8790,8	212,0	1,85624	37,6937
12	9632,2	9203,4	9790,8	212,0	1,85624	37,6937
13	10991,1	10567,9	10160,7	250,5	2,22073	44,3390
14	11437,4	11019,2	10616,8	223,5	1,97003	37,7384
15	10853,4	10452,7	10067,2	212,0	1,85623	37,6937
16	8602,6	8250,2	7911,0	206,0	1,80467	36,6269
17	7712,5	7422,1	7142,6	193,5	1,69622	34,4044
18	6414,5	6230,1	6052,6	170,5	1,51842	30,3150
19	2093,3	2020,6	1950,6	117,6	1,06680	20,9093
20	406,4	390,0	374,0	43,6	0,50317	7,7521



Rys. 2. Częstości drgań własnych (kadłub wg MA)

Fig. 2. The natural frequency vibrations (the hull due to [MA])

Współczynniki ζ_i zmienności masy obliczono osobno dla każdej formy ze względu na zmienność masy wody towarzyszącej. To samo dotyczy ciężarów odcinków kadłuba wraz z wodą towarzyszącą. Kadłub podzielono w obu przypadkach na 20 odcinków, co stanowi optymalną wielkość w tego rodzaju obliczeniach. Otrzymane wyniki z obu metod zestawiono w tabeli 3.

Tabela 3. Zestawienie wyników

Table 3. Summary of the results

ω [rad/s]	M_A	SES	Różnica w % do MA	Mierzone wg [2]	Różnice w % do MA
ω_1	4,427	4,351	1,7	4,46	0,74
ω_2	9,439	9,449	0,1	9,45	0,11
ω_3	15,373	15,660	0,7	15,12	1,64

PODSUMOWANIE

Końcowe zależności można łatwo uogólnić do obliczeń drgań giętnych belek o zmiennej masie i sztywności przy dowolnych warunkach brzegowych. Wprowadzenie dowolnego obciążenia dynamicznego ujętego w przedstawionym różniczkowym równaniu dystrybucyjnym (2) pozwala na łatwe obliczenie przedstawioną metodą momentu gnącego kadłuba – belki i jego ogólnej wytrzymałości [14].

Poprawność przyjętej metody obliczeń drgań giętnych kadłuba potwierdzają wykonane obliczenia porównawczą metodą numeryczną SES oraz do wartości mierzonych [2]. W większości przypadków (tab. 3) różnice nie przekraczają 1%.

WAŻNIEJSZE OZNACZENIA, SKRÓTY I SYMBOLE

- $B = B(x)$ – szerokość statku na wodnicy;
- E – moduł sprężystości materiału kadłuba;
- f_k – częstość drgań własnych kadłuba;
- F_i – pole przekroju poprzecznego odcinka kadłuba ($i = 1, 2 \dots n$);
- $H_0, H_1, H_2 \dots$ – funkcja Heaviside’a i jej pochodne;
- $I(x)$ – moment bezwładności przekroju poprzecznego kadłuba względem osi obojętnej;
- I_0 – moment bezwładności przekroju poprzecznego pierwszego odcinka kadłuba okrętu ($0 < x < x_1$);
- i – bieżący wskaźnik zmian sztywności, masy i szerokości kadłuba ($i = 1, 2, 3 \dots n$);
- j – numer elementu (odcinka kadłuba) przy obciążeniach metodą ES i SES oraz przy podziale obciążenia;
- k – numer częstości drgań własnych;
- $m(x)$ – masa na jednostkę długości kadłuba w przekroju x ;
- m_0 – masa na jednostkę długości pierwszego odcinka kadłuba ($0 < x < x_1$);
- $M_k = M_k(x)$ – moment gnący w przekroju x ;
- \bar{M}_k – moment gnący $M_k(x)$ w przekroju x pomnożony przez $-\frac{1}{EI_0}$;
- $\bar{M}'_{kx}, \bar{M}''_{kx}, \dots, \bar{M}'_{ku}, \bar{M}''_{ku} \dots$ – pochodne momentu gnącego względem x i u ;
- I_i – długość odcinka kadłuba $i = (1, 2, \dots n)$;
- T – okres drgań własnych;
- Y_r – funkcje Kryłowa ($r = 0, 1, 2, 3$);
- $z_k = z_k(x)$ – linia ugięcia;
- $\bar{\alpha}$ – współczynnik tłumienia;
- γ_i – współczynnik „S” funkcji;
- ζ_i – współczynnik zmiany masy z uwzględnieniem wody towarzyszącej;
- ξ_i – współczynnik zmiany sztywności;

- ω_k – częstości kołowe drgań własnych kadłuba;
MA – metoda analityczna;
MES – metoda elementów skończonych;
SES – metoda sztywnych elementów skończonych.

LITERATURA

1. Ahlberg J.N., Nilson E.N., Walsh J.L., *The Theory of Splines and Their Applications*, Ac. Press, New York-London 1957.
2. Andersson G., Norrand K., *A Method of the Calculation of Vertical Vibration with Several Modes and some other Aspects of Ship Vibrations*, Transactions of RINA 111, 1969, p. 367–383.
3. Czyż W., *Metoda wyznaczania wartości współczynnika tłumienia drgań kadłuba okrętu*, Zeszyty Naukowe WSMW, 1984/85, nr 1.
4. Desai C.S., *Nonlinear Analyses using Spline Functions*, Journal of the Soil Mech. and Found. Div. Proceedings of the Amer. Soc. of Civil Eng., 1971, vol. 97, pp. 1461–1480.
5. Greville T.N.E., *Theory and Applications of Spline Functions*, Ac. Press, London 1969.
6. Kečs W., Teodorescu P., *Vvedenie v teoriju obobščennych funkcij z prilozhenijami w technike* (tłum. z rumuńskiego), Mir, Moskwa 1978.
7. Kisielew V.A., *Stroitielnaja Mechanika*, Stroiznat, Moskwa 1980.
8. Krylov A.N., *O niekotorich differencjalnych uravnenijach matematičeskoj fiziki*, Gos. Izd. Tech. Teoret. Lit., Moskwa 1950.
9. Lazarjan V.A., *Techničeskaja teorija izgiba*, Nauk. Dumka, Kijev 1976.
10. Lazarjan V.A., Konašenko S.I., *O primienienij obobščennych funkcij pri issledovanij kolebanij stierżniej s kusočno postojannymi parametrami*, 1971, P.M. T 7, vyp. 9.
11. Lazarjan V.A., Krjutčenko E.V., *Opredelenie častot i form sobstvennych kolebanij stierżniej so sosredotočennymi vklučenijami*, 1971, P.M. T VII, vyp. 6.
12. Lazarjan V.A., Manuskin Ł.A., *Sobstvennyje prodolnyje kolebanija stierżniej so soredotočennymi massami*, 1970, P.M. T VI, vyp. 8.
13. *Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji*, J. Kruszewski, W. Gawroński, W. Ostachowicz, J. Tarnowski, E. Wittbrodt (red.), Arkady, Warszawa 1984.
14. Powierża Z., *Wytrzymałość ogólna kadłuba okrętu przy niekontaktowych wybuchach podwodnych*, Zeszyty Naukowe AMW, 1991, nr 108 A.
15. Putov N.E., *Projektirovanije konstrukcji korpusa morskich sudov, cz. 2*, Izd. Sudostr, Leningrad 1977.
16. Slepjan L.I., Jakovlev J.S., *Integralnyje preobrazowania v niestacionarnych zadačach mechaniki*, Izd. Sudostr., Leningrad 1980.
17. *Spravočnik po stroitielnoj mechanike korablja*, t. 3, A. Šimanskog (red.), Izd. Sudpromgiz, Leningrad 1960.
18. Stiečkin S.B., Subbotin J.N., *Splajny v vyčislitelnoi matematike*, Izd. Nauka, Moskwa 1976.
19. Więckowski J., Kolenda J., Kurski W., Wituszyński K., *Dynamika konstrukcji okrętowych*, Wyd. MSMW, Gdynia 1982.

OPERATIONAL – DISTRIBUTION METHOD WITH THE USAGE OF „S” FUNCTION FOR THE CALCULATION OF VERTICAL SHIPS HULL VIBRATIONS AND OTHER STRENGTH ASPECTS

Summary

The paper describes an analytical calculation method on the basis of distribution and operator theory. The presented method is very useful in the calculation of vertical vibrations of ship hull. The physical model is an elastic beam having arbitrary mass and stiffness distribution. Including a kind of dynamic force in the basic equation, we can also determine the bending moments. The result of this calculation is shown in the table 3 as well as the comparison with the theoretical values and the numerical calculation results.

Keywords: mass, model, beam, ship, hull, vibration.