Piotr S. Dębicki
Akademia Morska w Gdyni

WEKTOR POYNTINGA W ANALIZIE OSCYLACJI MOCY BIERNEJ W SIECIACH ENERGETYCZNYCH

Niniejsza publikacja przeznaczona jest dla elektryków zainteresowanych, dyskutowanym ostatnio, zagadnieniem oscylacji mocy biernej w sieciach energetycznych. Niektóre z prac sugerują konieczność użycia wektora Poyntinga do analizy zjawiska. W tym artykule przeprowadza się Czytelnika w sposób przystępny poprzez wybrane podstawy teorii pola elektromagnetycznego, aby pokazać, dlaczego do analizy mocy, przesyłanej na częstotliwości 50 Hz wzdłuż jednorodnego wieloprzewodowego toru transmisyjnego, stosowanie wektora Poyntinga jest zbędne, natomiast przydatne do określania przestrzennego rozkładu gęstości mocy przenoszonej pomiędzy przewodami.
Artykuł nie analizuje wpływu źródeł i obciążeń. Ich wpływ można uwzględnić poprzez superpozycję rozwiązań tu uzyskanych [9].

Słowa kluczowe: *moc bierna, oscylacje mocy, wektor Poyntinga, równania Maxwella, analiza polowa, pola quasi-stacjonarne, propagacja fal/mocy, rozkład poprzeczny pola, równanie Laplace'a, linia współosiowa.*

WSTĘP

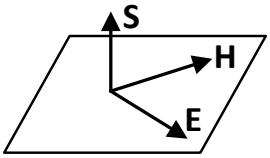
W ostatnich latach pojawiło się wiele publikacji dotyczących zjawiska oscylacji mocy biernej w układach energetycznych i jego interpretacji fizycznych [1–8, 10–15]. Niektóre z tych z tych publikacji sugerują, że dokładne zrozumienie zachodzących zjawisk nie jest możliwe bez wprowadzenia **wektora Poyntinga**, który opisuje powierzchniową gęstość strumienia mocy i ma wymiar [W/m^2] [14]. Wektor Poyntinga jest zdefiniowany w teorii pola elektromagnetycznego jako iloczyn wektorowy wektorów natężenia pola elektrycznego **E** [V/m] i natężenia pola magnetycznego **H** [A/m](rys.1.)[1]:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \tag{1}$$

Samo wprowadzenie wektora Poyntinga jest krokiem w kierunku uwzględnienia zjawisk teorio-polowych w układach i systemach, które tradycyjnie analizuje się prawie wyłącznie metodami obwodowymi. W sytuacjach, gdy pojawiają się

[1] W tym miejscu nie precyzuje się jeszcze, czy wielkości występujące we wzorze (1) są amplitudami rzeczywistymi lub zespolonymi, czy wartościami chwilowymi, itp. Jest to sytuacja podobna do powiązania napięcia, prądu i mocy we wzorze $P = UI$, który jest modyfikowany w zależności od analizowanej sytuacji.

niejasności interpretacyjne, czego dowodem jest prowadzona od lat dyskusja oferująca odmienne spojrzenia na problem oscylacji mocy biernej w sieciach energetycznych [1–8, 10–12], krok w kierunku analizy teorio-polowej jest generalnie słuszny, gdyż analiza obwodowa w przypadkach skrajnych, granicznych, może prowadzić do mylnych interpretacji fizycznych. W szczególności przyjęcie, że rozmiary L_i wszystkich obwodów w stosunku do długości fali λ: $L_i/\lambda = 0$, co milcząco jest przyjmowane w energetyce, prowadzi, zdaniem autora, do mylnych interpretacji oscylacji mocy[2]. Problem ten został rozwinięty w innej pracy [9], natomiast długość fali w sposób zdecydowanie zamierzony pojawia się w tym artykule.



Rys. 1. Relacja przestrzenna wektorów **S**, **E** i **H**

Fig. 1. *The vectors* ***S****,* ***E*** *and* ***H*** *space relations*

Zastosowanie analizy polowej jest jednak uzasadnione tylko wtedy, gdy wyjaśnia ona zjawiska, których opis jest trudny lub niemożliwy metodami obwodowymi. Wprowadzanie jej bez potrzeby prowadzi jedynie do niepotrzebnej komplikacji opisu zjawisk, które można by wyjaśnić prościej. W niniejszym artykule pokazano, w jakich sytuacjach zastosowanie wektora Poyntinga jest korzystne, a nawet niezbędne, a kiedy jego użycie do analizy oscylacji mocy jest bezzasadne. Niestety, by osiągnąć ten cel, trzeba użyć metody polowej, ale przeprowadzono to w sposób możliwie łagodny, z wyjaśnieniami sensu fizycznego przeprowadzanych przekształceń matematycznych. W kilku miejscach zastosowano drobne uproszczenia, by nie zaburzyć jasności przesłania fizycznego.

Na początku przypomniano równania Maxwella oraz pokazano trzy przypadki szczególne, potrzebne do dalszych rozważań: elektrostatyka i magnetostatyka, pobudzenie harmoniczne i propagacja w jednym kierunku. W tym ostatnim przypadku zakłada się, że mamy do czynienia z jednorodną, liniową, wieloprzewodową linią transmisyjną przesyłającą moc w jednym kierunku.

W przypadku, gdy wymiary poprzeczne struktury (linii) prowadzącej moc są dużo mniejsze od długości fali i gdy struktura w przekroju poprzecznym do kierunku propagacji jest matematycznie **wielospójna** (tzn. fizycznie: wieloprzewodowa, a przynajmniej dwuprzewodowa), to rozkład pola elektrycznego i magnetycznego w tym przekroju struktury jest taki sam jak dla przypadku elektrostatyki i pól magnetostacjonarnych, nawet wtedy, gdy częstotliwość jest bardzo wysoka.

[2] Innym przypadkiem tworzenia mylnych interpretacji fizycznych w energetyce jest przekształcanie wyrażeń trygonometrycznych na wiele sposobów i przypisywanie powstałym składnikom nazw i interpretacji fizycznych.

Pokazano na prostym przykładzie, jak przesyłana moc jest powiązana z wektorami pola elektromagnetycznego **E** i **H** oraz napięciami i prądami.

Ponadto całkowita przesyłana moc jest jednoznacznie określona przez napięcia i prądy, a podejście polowe jest potrzebne jedynie do badania rozkładu gęstości mocy wokół czy pomiędzy przewodami. Wymienione powyżej założenia nie ograniczają ogólności rozważań, gdyż inne możliwe przypadki (dowolne źródła i obciążenia, transmisja w obu kierunkach) mogą być analizowane jako superpozycje otrzymanego rozwiązania i prowadzą do jasnych interpretacji fizycznych, dobrze znanych w technice wysokich częstotliwości. Sytuacje te, jak również problemy związane z oscylacjami mocy, analizowane są w pracy [9]. Tutaj pokazano jedynie związki ogólne pomiędzy mocą *P*, napięciem *U* i prądem *I* a wektorami **S**, **E** i **H** bez precyzowania, czy chodzi o moc czynną, bierną, czy pozorną, gdyż te przymiotniki/cechy mogą być odpowiednio przenoszone z mocy na wektor Poyntinga i odwrotnie.

1. WYBRANE PRZYPADKI SZCZEGÓLNE RÓWNAŃ MAXWELLA

Równania Maxwella przedstawia się zazwyczaj albo w postaci całkowej, słusznej dla obszarów skończonych[3]:

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}\text{, (prawo Faradaya)} \quad \oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = Q\text{, (prawo Gaussa)} \tag{2a, b}$$

$$\oint_L \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}\text{, (prawo Ampera)} \quad \oint_S \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0\text{,} \tag{2c,d}$$

albo w postaci różniczkowej, słusznej dla punktu w przestrzeni[4]:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho \tag{3a, b}$$

[3] Interpretacja fizyczna postaci całkowej równań Maxwella jest następująca: Równanie (2a) Napięcie zaindukowane w obwodzie zamkniętym *L* zależy od szybkości zmian strumienia pola magnetycznego, przenikającego przez obszar *S* ograniczony tym obwodem; (2b) Strumień wektora indukcji elektrycznej wypływający z powierzchni zamkniętej *S* jest równy całkowitemu ładunkowi *Q* zawartemu wewnątrz tej powierzchni; (2c) Całkowity prąd (przewodzenia i przesunięcia) przepływający przez powierzchnię *S* otoczoną zamkniętym konturem *L*, jest równy sumie składowych pola magnetycznego **H** w kierunku konturu *L*; (2d) Strumień wektora indukcji magnetycznej wypływający z powierzchni zamkniętej *S* jest równy zeru.

[4] Zastosowane operatory **rot** i **div** są rozszerzeniem pojęcia pochodnej na pola wektorowe; **rot** (rotacja, wirowość) mówi o zmianach pola w kierunku prostopadłym do pola, a **div** (dywergencja, źródłowość) mówi o zmianach pola w kierunku pola). Interpretacja fizyczna postaci różniczkowej równań jest następująca: Równanie (3a) Zmienne w czasie pole magnetyczne wytwarza wirowe pole elektryczne i odwrotnie; (3b) Źródłem pola elektrycznego są ładunki; (3c) Zmienne w czasie pole elektryczne (prąd przesunięcia) i/lub prąd przewodzenia wytwarzają wirowe pole magnetyczne i odwrotnie; (3d): Nie ma źródeł pola magnetycznego.

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \qquad \text{(3c, d)}$$

W równaniach powyższych:

- **B** [T] jest wektorem indukcji magnetycznej związanej z wektorem **H** (w ośrodku liniowym, izotropowym) relacją **B** = μ**H** (równanie materiałowe), gdzie μ [H/m] jest przenikalnością magnetyczną;
- **D** [C/m^2] jest wektorem indukcji elektrycznej związanej z wektorem **E** (w ośrodku liniowym, izotropowym) relacją **D** = ε**E** (równanie materiałowe), gdzie ε [F/m] jest przenikalnością elektryczną;
- **J** [A/m^2] = σ**E** (prawo Ohma), jest wektorem gęstości prądu przewodzenia, σ[S/m] jest przewodnością;
- $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ [C/(m^{2}s)=A/m^2] jest wektorem gęstości prądu przesunięcia, wprowadzonym przez Maxwella;
- Q [C] jest ładunkiem całkowitym w obszarze ograniczonym powierzchnią zamkniętą S;
- ρ [C/m^3] jest gęstością objętościową ładunku;
- L jest brzegiem powierzchni otwartej S, elementy d**l** i d**s** są, odpowiednio, nieskończenie małymi elementami skierowanymi brzegu L i powierzchni otwartej lub zamkniętej S.

1.1. Równania Maxwella dla pobudzenia harmonicznego i amplitud zespolonych

Można założyć, że w pierwszym podejściu analizowane będzie wyłącznie **pobudzenie harmoniczne** o pulsacji $\omega = 2\pi f$ [rd/s]. W przypadku posługiwania się amplitudami zespolonymi zależność od czasu zawarta jest w wyrażeniu $\mathrm{e}^{j\omega t}$ ($j = \sqrt{-1}$), które dalej nie będzie uwidaczniane. To pozwala na zastąpienie pochodnych po czasie $\partial/\partial t$ przez $j\omega$. Zmieniając w ten sposób równania (3a) i (3c) oraz podstawiając do nich tzw. **równania materiałowe**, wymienione już wyżej: **D** = ε**E** oraz **B** = μ**H,** a także korzystając z relacji **J** = σ**E,** nazywanej **prawem Ohma dla punktu w przestrzeni**, otrzymamy:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -j\omega\mu \cdot \mathbf{H} \qquad \text{oraz} \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = j\omega\hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}, \qquad \text{(4a, b)}$$

gdzie:

$$\hat{\varepsilon} = \left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right) \qquad (5)$$

nazywane jest zespoloną przenikalnością elektryczną.

W powyższym zapisie widoczna jest symetria pól **E** i **H**, ulubiona przez fizyków. By tę symetrię lepiej uwidocznić, można równania (3b) i (3d) zapisać w postaci[5]:

[5] Niestety, w równaniu (6b) po prawej stronie występuje 0, psujące estetykę symetrii, ale w wielu pracach wstawia się tam ρ_m/μ, gdzie ρ_m jest fikcyjną gęstością nieistniejących ładunków magnetycznych. Nie ma to sensu fizycznego, ale ułatwia niektóre obliczenia.

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho/\varepsilon, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{6a, b}$$

Wektory **E** i **H** są teraz amplitudami zespolonymi pola.

1.2. Quasi-stacjonarne równania Maxwella dla elektrostatyki i pól magnetostacjonarnych

Przypadek pól quasi-stacjonarnych jest tylko pozornie niezwiązany z analizowanym problemem, gdyż w przypadku tzw. fal TEM, czyli fal nieposiadających składowych pól **E** i **H** w kierunku rozchodzenia się fali – co jest właśnie przypadkiem energetyki – rozkład poprzeczny pola jest rozkładem elektrostatycznym i magnetostacjonarnym, więc niezależnym od częstotliwości, jak pokazano dalej.

W równaniach Maxwella (4) i (6) należy teraz podstawić $\omega = 0$, pozostawiając przepływ prądu przewodzenia. Otrzymuje się[6]:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = \rho/\varepsilon, \tag{7a, b}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{7c, d}$$

Pole magnetyczne, którego linie sił są zamknięte, jest wirowe i jest teraz wytwarzane wyłącznie przez prąd przewodzenia **J**. Pole elektryczne jest bezwirowe i jest wytwarzane przez gęstość ładunków ρ, tzn. linie sił zaczynają się i kończą na ładunkach. Jest to pole potencjalne. To oznacza, że istnieje potencjał skalarny U, którego gradientem[7] jest pole elektryczne:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U. \tag{8}$$

Równanie (8) należy podstawić teraz do równania Gaussa w postaci różniczkowej (7b), aby otrzymać:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \nabla(\nabla U) = \nabla^2 U = \Delta U = -\rho/\varepsilon \text{ [8]}. \tag{9}$$

---

[6] W równaniu (7c) po prawej gęstość prądu $\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{E}$ dotyczy ruchu ładunków w ośrodku stratnym, a w równaniu (7b) gęstość objętościowa ładunków ρ dotyczy ładunków nieruchomych, co prowadzi do sprzeczności tak zapisanych równań. W każdym z punktów przestrzeni musi więc być spełniona sytuacja, że albo $\rho = 0$, albo $\sigma = 0$.

[7] Gradient wskazuje kierunek najszybszych zmian pola skalarnego i wartość tych zmian. Może być użyty wyłącznie do pola skalarnego, a wynikiem jego działania jest pole wektorowe.

[8] Używane wektorowe operatory różniczkowe **grad**, **div** i **rot** mogą być zapisywane również przy użyciu tzw. operatora nabla, o postaci: $\nabla = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$, ($\mathbf{i}_x$ – wersor w kier. x, itd.). Operator ten nie jest wektorem, lecz ma pewne cechy wektora, choć nie można dla niego określić ani długości, ani kierunku. Ma trzy sposoby działania. Jeśli działa na pole skalarne, tworzy pole wektorowe. Działając na pole wektorowe symbolicznie w postaci iloczynu skalarnego, tworzy pole skalarne, natomiast działając wektorowo na pole wektorowe, tworzy nowe pole wektorowe. Np.: grad $h = \nabla h$ – wektor, div $\mathbf{A} = \nabla\mathbf{A}$ – skalar, rot $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$ – wektor. W tych wyrażeniach operator nabla nie „mnoży", lecz „działa na" skalar lub wektor na wzór iloczynu skalarnego lub wektorowego.

Jest to **równanie różniczkowe Poissona**, które mówi, że źródłem (div) zmian (grad) potencjału elektrycznego są ładunki. Zastosowany operator, będący złożeniem operatorów dywergencji i gradientu, zwany **laplasjanem** ma, w układzie kartezjańskim, postać:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{10}$$

Ważnym przypadkiem szczególnym równania Poissona, które będzie przedmiotem dalszego zainteresowania, jest sytuacja, gdy analizuje się obszary bez ładunków stacjonarnych. Otrzymujemy wtedy znane w bardzo wielu zastosowaniach fizycznych **równanie Laplace'a**:

$$\nabla^2 U = 0\,, \tag{11}$$

którego rozwiązania mają interesujące właściwości fizyczne, przedstawione dalej.

1.3. Przypadek propagacji fal/mocy w jednym wybranym kierunku ($\omega \neq 0$)

1.3.1. Przypadek ogólny

W przypadku transmisji mocy w jednym wybranym kierunku należy zbadać oddzielnie zachowanie się składowych pól skierowanych w kierunku przepływu mocy i do niego prostopadłych. Zakładając, że kierunkiem przepływu mocy w układzie kartezjańskim jest kierunek *z*, można łatwo rozdzielić równania Maxwella na odpowiednie części. Każdy z wektorów pola **E** i **H** można rozłożyć na część podłużną ($E_z\mathbf{i_z}$, $H_z\mathbf{i_z}$) i poprzeczną ($\mathbf{E_t}$, $\mathbf{H_t}$) np.:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_t} + E_z\mathbf{i_z}\,, \tag{12}$$

gdzie $\mathbf{E_t} = E_x\mathbf{i_x} + E_y\mathbf{i_y}$, a $\mathbf{i_x}$, $\mathbf{i_y}$, i $\mathbf{i_z}$ są wersorami w kierunkach osi *x*, *y*, i *z*.

Każde z równań wektorowych (4a) i (4b) też może zostać rozdzielone na część podłużną skalarną w kierunku *z* i poprzeczną część wektorową. By zrobić to efektywnie, wygodnie jest również rozdzielić na części operator nabla, wspomniany w przypisie 8:

$$\nabla = \mathbf{i}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z\frac{\partial}{\partial z} = \nabla_{\mathbf{t}} + \mathbf{i}_z\frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{13}$$

W kierunku osi *z* oczekuje się rozwiązania harmonicznego, więc w rozwiązaniu powinna się pojawić albo kombinacja funkcji trygonometrycznych, albo funkcja typu $\mathrm{e}^{-j\beta\cdot z}$. Jeżeli dopuści się rozwiązanie harmoniczne tłumione, to może ono mieć

wygodną postać $e^{-\gamma \cdot z} = e^{-\alpha \cdot z} e^{-j\beta \cdot z}$. Obliczanie więc pochodnej w kierunku osi z sprowadza się do pomnożenia przez $-\gamma$[9]. Wzór (13) przyjmie postać:

$$\nabla = \nabla_{\mathbf{t}} - \gamma \cdot \mathbf{i}_z . \tag{14}$$

Po zapisaniu równań (4a) i (4b) za pomocą operatora nabla i rozdzieleniu na części otrzyma się:

A) Część podłużną:

$$\nabla_{\mathbf{t}} \times \mathbf{E}_{\mathbf{t}} = -j\omega\mu \cdot H_z \mathbf{i}_z , \qquad \nabla_{\mathbf{t}} \times \mathbf{H}_{\mathbf{t}} = j\omega\hat{\varepsilon} \cdot E_z \mathbf{i}_z . \tag{15a,b}$$

B) Część poprzeczną:

$$\left(-\gamma \cdot \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_{\mathbf{t}}\right) + \nabla_{\mathbf{t}} \times E_z \mathbf{i}_z = -j\omega\mu \cdot \mathbf{H}_{\mathbf{t}} , \quad \left(-\gamma \cdot \mathbf{i}_z \times \mathbf{H}_{\mathbf{t}}\right) + \nabla_{\mathbf{t}} \times H_z \mathbf{i}_z = j\omega\hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{t}}$$
(16a,b)

Szczegółowa analiza rozwiązań równań różniczkowych (15) i (16) pokazuje, że dla idealnie przewodzących struktur przesyłających moc**, istnienie składowych E_z i H_z implikuje istnienie pewnej częstotliwości granicznej**, tylko powyżej której możliwa jest propagacja fali/mocy. Są to tzw. **rodzaje falowodowe**[10].

Wspomniana częstotliwość graniczna jest powiązana z poprzecznymi rozmiarami struktury prowadzącej fale. Jeżeli wymiary poprzeczne struktury są dużo mniejsze od długości fali (co zachodzi dla 50 Hz), propagacja ze składowymi E_z i H_z nie jest możliwa. **W przypadku sieci energetycznych należy przyjąć $E_z = 0$ i $H_z = 0$.**

Fale, które spełniają ten warunek, nazywa się **falami TEM** (***T****ransverse* ***E****lectro****m****agnetic*).

W przypadku więc propagacji fal TEM w kierunku z, równania Maxwella przyjmują postać:

$$\nabla_{\mathbf{t}} \times \mathbf{E}_{\mathbf{t}} = 0 , \qquad \nabla_{\mathbf{t}} \times \mathbf{H}_{\mathbf{t}} = 0 , \tag{15c, d}$$

$$\left(-\gamma \cdot \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_{\mathbf{t}}\right) = -j\omega\mu \cdot \mathbf{H}_{\mathbf{t}} , \qquad \left(-\gamma \cdot \mathbf{i}_z \times \mathbf{H}_{\mathbf{t}}\right) = j\omega\hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{t}} . \tag{16c, d}$$

Z równań powyższych wynika szereg właściwości fal TEM, takich jak prostopadłość wektorów **E** i **H**, równość impedancji falowej E/H i impedancji charakterystycznej ośrodka i inne, które nie będą tu bliżej analizowane.

---

[9] Stała γ jest nazywana stałą propagacji i ma dwie składowe: $\gamma = \alpha + j\beta$. α jest stałą tłumienia, a β – stałą fazową. W wolnej przestrzeni i dla fal TEM β jest związane z długością fali λ: $\beta = 2\pi/\lambda$. Przy braku strat $\gamma = j\beta$.

[10] W przypadku rodzajów falowodowych nie ma jednoznacznego powiązania pomiędzy mocami a napięciami i prądami. Również, znane z teorii linii długich, pojęcie impedancji charakterystycznej jest niejednoznaczne. Problem ten nie występuje w przypadku prowadnic z rodzajem TEM.

1.3.2. Przypadek małych strat przewodzenia i rozkład poprzeczny pola

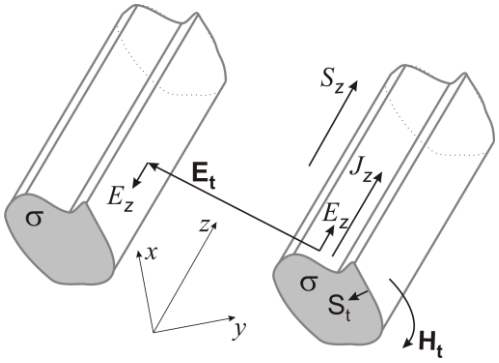
Równania (15) i (16) są równaniami różniczkowymi, które należy rozwiązać z określonymi **warunkami brzegowymi**. W przypadku prowadzonych fal/mocy warunki te są określone przez powierzchnie przewodzące struktury. Należy jeszcze przedyskutować sytuację, gdy przewodność struktury nie jest idealna. Zgodnie z prawem Ohma dla punktu w przestrzeni $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, przepływ prądu wzdłuż przewodu (np. w kierunku z) wywoła spadek napięcia wzdłuż przewodu, czyli powstanie składowej E_z (rys. 2). Przy danej wartości prądu I_z [A] i wynikającej z niego gęstości J_z [A/m^2] wartość składowej E_z będzie tym mniejsza, im większa będzie przewodność σ. Ta maleńka składowa E_z nie jest związana ze wspomnianymi rodzajami falowodowymi i będzie istnieć, ale jedynie tuż przy powierzchni i wewnątrz przewodów.

Jeżeli do równania (15b) podstawi się wyrażenie (5) na zespoloną przenikalność elektryczną, po prawej stronie pojawi się suma prądów przewodzenia $\left(J_z = \sigma \cdot E_z\right)$ i przesunięcia $\left(j\omega\varepsilon \cdot E_z\right)$:

$$\nabla_{\mathbf{t}} \times \mathbf{H}_{\mathbf{t}} = \left(j\omega\varepsilon \cdot E_z + \sigma \cdot E_z\right) \cdot \mathbf{i}_z . \tag{17}$$

Podstawienie wartości liczbowych pokazuje, że dla typowych wartości przewodności i częstotliwości energetycznych prąd przesunięcia jest o wiele rzędów wielkości mniejszy od prądu przewodzenia i może być pominięty. Podsumowując, równania (15) na część podłużną pola przyjmują postać:

$$\nabla_{\mathbf{t}} \times \mathbf{E}_{\mathbf{t}} = 0 , \qquad \nabla_{\mathbf{t}} \times \mathbf{H}_{\mathbf{t}} = J_z \mathbf{i}_z . \tag{18a,b}$$



Rys. 2. Geometria wektorów pola i Poyntinga linii dwuprzewodowej, pokazująca część podłużną i poprzeczną. Składowa podłużna wektora Poyntinga $\mathbf{S_z}$ jest iloczynem wektorowym $\mathbf{E_t}$ i $\mathbf{H_t}$, a składowa poprzeczna $\mathbf{S_t}$ powstała jako iloczyn $\mathbf{E_z}$ i $\mathbf{H_t}$ i jest odpowiedzialna za straty cieplne w przewodach

Fig. 2. *Field and Poynting vectors geometry in two wire line for the parts transversal and longitudinal. The longitudinal component of the Poynting vector* $\mathbf{S_z}$ *is a vector product of* $\mathbf{E_t}$ *and* $\mathbf{H_t}$*, as well as the transversal component* $\mathbf{S_t}$*, arisen as a product of* $\mathbf{E_z}$ *and* $\mathbf{H_t}$*. The last one is responsible for the thermal losses in the wire*

Trzeba zauważyć, że paradoksalnie, równania na część podłużną opisują zachowanie się poprzecznej części pola. Porównując powyższe równania z równaniami dla elektrostatyki i magnetostatyki (7a) i (7c), widać, że **poprzeczny rozkład pola struktur prowadzących moc w postaci fal TEM jest identyczny jak dla elektrostatyki i pól magnetostacjonarnych bez względu na częstotliwość**. Również w przypadku sieci energetycznych jest to spełnione.

1.3.3. Rozkład podłużny pola

Należy teraz przeanalizować równania (16a,b). Składnik zawierający H_z nie istnieje (fala TEM), natomiast składnik zawierający E_z jest znacznie mniejszy od pozostałych i może być pominięty. Po tym zabiegu nie są to już równania różniczkowe. Równania przyjmą więc postać (16c,d). Informację fizyczną zawartą w tych równaniach łatwo uzyskać, wyznaczając wartość $\mathbf{H_t}$ z równania (16c) i wstawiając ją do równania (16d):

$$\gamma^2 \mathbf{E_t} = -\omega^2 \mu \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E_t} . \tag{19}$$

Z równania tego uzyskuje się informację dotyczącą charakteru propagacji w kierunku osi *z*, opisanej przez wprowadzoną wielkość zespoloną γ, nazywaną **stałą propagacji** (por. przypis 8):

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\hat{\varepsilon}} = \alpha + j\beta . \tag{20}$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem opisuje parametry elektryczne ośrodka wypełniającego strukturę prowadzącą falę/moc. W zastosowaniach energetycznych straty można w pierwszym podejściu często pominąć i wtedy $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$ a $\gamma = j\beta$. Zmiany natężenia pola elektrycznego w kierunku przesyłu mocy/fali mają więc postać[11]:

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E_t} e^{-j\beta \cdot z} . \tag{21}$$

Analogiczne równanie można zapisać dla wektora natężenia pola magnetycznego.

Podsumowując, rozłożenie równań Maxwella na część podłużną w kierunku przesyłu mocy i część poprzeczną pozwoliło uzyskać informację, że:

- w kierunku poprzecznym rozkład pola jest taki sam jak dla elektrostatyki i rozkład potencjału jest dany przez równanie Laplace'a (zakłada się, że nie ma ładunków pomiędzy przewodami) – równanie (11);
- w kierunku podłużnym, przy pominięciu strat, mamy zachowanie harmoniczne określone przez właściwości ośrodka wypełniającego przestrzeń pomiędzy przewodami, równanie (21).

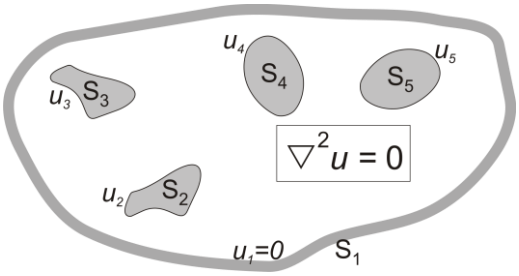
---

[11] Wyrażenie $\beta z = 2\pi . z/\lambda$ w wykładniku wzoru (21) w przypadku sieci energetycznych jest niezwykle małe i praktycznie do pominięcia przy długości fali 6000 km; tak więc faza pola elektrycznego jest praktycznie związana tylko z wyrażeniem $e^{j\omega t}$, które jest pominięte w zapisie.

2. WŁAŚCIWOŚCI ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA LAPLACE'A

Poniżej opisano właściwości rozwiązań równania Laplace'a[12] na przykładzie równania (11): $\nabla^2 U = 0$, stwierdzającego, że w analizowanym obszarze nie ma źródeł zmian potencjału elektrycznego *U*. Równanie (11) jest równaniem różniczkowym cząstkowym i jednorodnym. Rozwiązuje się je w obszarze ograniczonym brzegiem lub brzegami, na których są zadane **warunki brzegowe**. W tym przypadku brzegi te będą przewodnikami.

Podczas badania struktur otwartych tworzy się brzeg, ograniczający obszar rozwiązania i przesuwa się go do nieskończoności. Przykładowo, powierzchnię S_1 na rysunku 3 można rozszerzyć do nieskończoności. Zazwyczaj wtedy przyjmuje się potencjał w nieskończoności $u_1 = 0$. Jak pokazano na rysunku 3, warunki brzegowe są **wielospójne** i na każdej powierzchni S_i można przyjąć inny potencjał u_i.



Rys. 3. Obszar rozwiązywania równania Laplace'a (biały) musi być ograniczony powierzchniami (S_i), na których dane są warunki brzegowe u_i. Powierzchnia S_1 może być rozszerzona do nieskończoności. Jeśli *u* jest potencjałem, powierzchnie muszą być ekwipotencjalne. W przypadku przesyłu energii jest to przekrój poprzeczny linii transmisyjnej z falą TEM

Fig. 3. *The Laplace equation solution area (white) has to be limited by surfaces (S_i) with boundary condition u_i. Surface S_1 may be extended to the infinity. If u is a potential, the surfaces S_i have to be equipotential. In the energy transfer case, the figure is a cross section of the transmission line with the TEM mode wave*

Jest nieskończenie wiele możliwości podania warunków brzegowych, ale liczba rozwiązań niezależnych, z których można uzyskać wszystkie inne rozwiązania, jest skończona i wynosi $N - 1$, gdzie N jest krotnością spójności analizowanego obszaru. Na rysunku 3 $N = 5$, więc istnieją cztery niezależne rozwiązania. Każde z nich jest jednoznaczne, tzn. nie istnieje inne rozwiązanie, spełniające te same warunki brzegowe.

Przy badaniu struktury jednospójnej $N - 1 = 0$, czyli nie ma rozwiązań nietrywialnych. W elektrostatyce np. nie ma pola wewnątrz naładowanej kuli. W przypadku przekroju poprzecznego struktur prowadzących falę/moc oznacza to,

[12] Dokładne omówienie właściwości równania Laplace'a można znaleźć w wielu podręcznikach elektrodynamiki, np. takich jak: David J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, PWN, Warszawa 2001.

że nie można przesłać mocy falą TEM poprzez np. pojedynczy przewód, rurę, czy falowód. Wtedy trzeba użyć fal nie-TEM, np. rodzajów falowodowych, posiadających składową E_z i/lub H_z pola.

Zgodnie z wynikami punktu 1.3 w przypadku linii przesyłowej energetycznej trójfazowej, zawierającej trzy przewody i przewód zerowy ($N = 4$), należy analizować oddzielnie przekrój poprzeczny i podłużny. Przekrój poprzeczny traktuje się jako płaski, dwuwymiarowy problem spełniający równanie Laplace'a. Ponieważ $N = 4$, występują trzy niezależne rozwiązania.

Istnieją różne sposoby definiowania tych rozwiązań, ale dla struktur z $N > 3$ wygodnie jest stosować tzw. **rodzaje każdej linii**. Polega to na tym, że dla pierwszego rodzaju poszukuje się rozwiązania, gdy pierwszy przewód jest na potencjale 1, a wszystkie pozostałe przewody są na potencjale zerowym. Następnie drugi przewód jest na potencjale 1 i pozostałe są uziemione, itd. Rozwiązanie dla dowolnego pobudzenia otrzyma się, tworząc superpozycję tych trzech rozwiązań z odpowiednimi wagami. Rozwiązanie dla rodzaju pierwszego mnożyć trzeba przez u_1, drugiego przez u_2, itd. Następnie dodaje się wszystkie rozwiązania.

Kolejną cechą rozwiązań równania Laplace'a jest fakt, że **ekstrema funkcji, będącej rozwiązaniem, mogą występować jedynie na brzegach obszaru**. Gdyby przedstawić warunki brzegowe na poszczególnych powierzchniach w postaci słupków o wysokości proporcjonalnej do wartości potencjału na tej powierzchni, to rozwiązanie wyglądałoby jak elastyczna membrana rozciągnięta na tych słupkach[13]. Membrana taka nie będzie miała lokalnych maksimów i minimów poza słupkami.

3. PRZYKŁAD PRAKTYCZNY

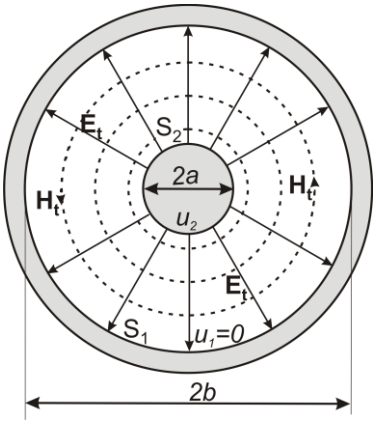
Mając już przygotowanie teoretyczne, można pokusić się o próbę rozwiązania konkretnego przykładu praktycznego, by zbadać, jak wygląda transmisja mocy w wybranej strukturze i jej opis za pomocą wektora Poyntinga (czyli wektorów pola) oraz napięć i prądów. Strukturę należy wybrać na tyle prostą, aby analiza matematyczna nie przesłoniła istoty fizycznej. Wygodnie będzie wybrać jako strukturę prowadzącą moc linię współosiową o wymiarach pokazanych na rysunku 4. Uzyskane wnioski można będzie przenieść na wszystkie rodzaje prowadnic/linii prowadzących falę typu TEM. Szczegółowe rozwiązanie rozkładu przestrzennego pola elektrycznego i magnetycznego zawarte jest dalej w Załączniku. Uzyskano tam następujące wzory na pola **E** i **H**:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathbf{t}}\,\mathrm{e}^{-j\beta\cdot z} = \frac{U_0\mathbf{i}_r}{r\ln b/a}\,\mathrm{e}^{-j\beta\cdot z}\left[\mathrm{V/m}\right], \tag{22}$$

[13] Dokładnie rzecz ujmując, równaniem membrany będzie równanie Laplace'a tylko wtedy, gdy odchylenia membrany od powierzchni płaskiej będą dostatecznie małe.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\mathbf{t}}\,\mathrm{e}^{-j\beta\cdot z} = \frac{I_0\mathbf{i}_{\varphi}}{2\pi r}\mathrm{e}^{-j\beta\cdot z}\left[\mathrm{A/m}\right], \tag{23}$$

gdzie U_0 i I_0 są, odpowiednio, napięciem i prądem w linii, r i φ są zmiennymi walcowego układu współrzędnych, odpowiednio, radialną i azymutalną, a a i b promieniami przewodów według rysunku 4.



Rys. 4. Geometria linii współosiowej i wektory pola

Fig. 4. *Coaxial line geometry and the field vectors*

3.1. Rozkład gęstości mocy czyli wektora Poyntinga

Przed obliczeniem wektora gęstości mocy należy podkreślić, że występujące we wzorach (22) i (23) amplitudy zespolone napięcia i prądu U_0 i I_0 są w fazie. W związku z tym wektory **E** i **H** są również w fazie. Mamy więc w tym przypadku do czynienia z przesyłem wyłącznie mocy czynnej. Przesunięcie w fazie pomiędzy U i I, jakie by się pojawiło, spowodowane np. składową reaktancyjną w obciążeniu, skutkowałoby pojawieniem się fali poruszającej się w przeciwnym kierunku. Wtedy U i I byłyby sumą, odpowiednio, napięć i prądów każdej z fal składowych. Analizę takich sytuacji przedstawiono w pracy [9].

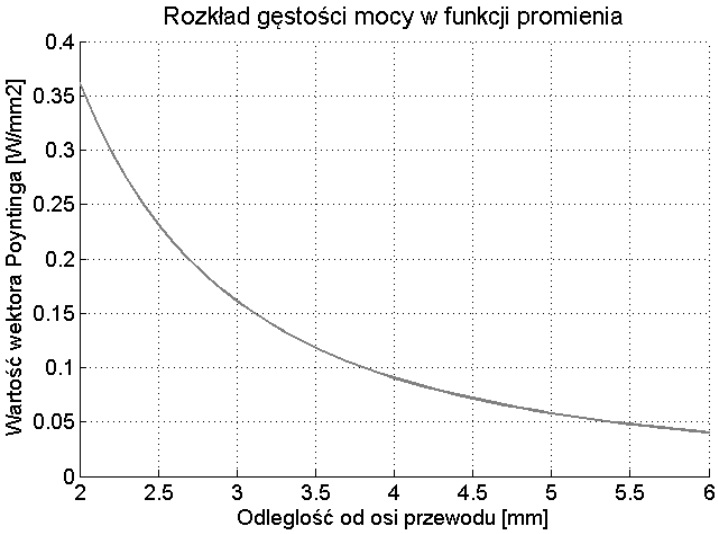
Ogólnie gęstość mocy czynnej przenoszonej przez pole, dla amplitud zespolonych można zapisać w postaci:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^{*}\right), \tag{24}$$

która jest modyfikacją wzoru (1). Do tej relacji można podstawić teraz zależności (22) i (23). Otrzyma się:

$$\mathbf{S} = \frac{U_0 I_0}{4\pi r^2 \log b/a} \mathbf{i}_z \,. \tag{25}$$

Wzór (25) opisuje radialną zmianę wektora gęstości mocy skierowanego w kierunku osi *z*. Ilustrację wzoru pokazano na rysunku 5, na którym podano też wartości zastosowanych parametrów. Tu widać przydatność wektora Poyntinga.



Rys. 5. Rozkład gęstości mocy [W/mm^2] w funkcji promienia dla linii współosiowej o wymiarach *a* = 2 mm, *b* = 6 mm, do której przyłożono napięcie o amplitudzie 10 V i w której płynie prąd o amplitudzie 1 A

Fig. 5. *Power density distribution [W/mm^2] vs. radius of the coaxial line with a = 2 mm, b = 6 mm. The voltage between wire is 10 V and the current is 1 A*

Zwraca uwagę ponadsiedmiokrotna różnica gęstości mocy pomiędzy powierzchnią przewodu wewnętrznego i zewnętrznego[14].

W podpunkcie 1.3.2 przeprowadzono dyskusję związaną z istnieniem niewielkiej składowej E_z, występującej w wyniku skończonej przewodności σ przewodów, którą można zaniedbać w pierwszym podejściu. Składowa ta,

[14] Wzór (25) można też wykorzystać do optymalizacji konstrukcji linii tak, aby gęstość mocy przy przewodzie wewnętrznym była najmniejsza. Jeśli podstawimy *a* w miejsce ρ i obliczymy pochodną ze względu na *a*, można określić optymalny stosunek średnic, zapewniający minimalną wartość *S*, który wynosi *b/a* = 3,6, co odpowiada linii o impedancji charakterystycznej ok. 77 Ω, a więc bliskiej popularnym kablom 75-omowym. Minimalna wartość gęstości mocy dla obliczonego stosunku *b/a* nie oznacza, że dla tej samej proporcji otrzymamy minimalną wartość wektora natężenia pola elektrycznego. W tym celu należy użyć równania (22), z którego otrzymamy w analogiczny sposób optymalną wartość *b/a* = 2,71, co odpowiada linii współosiowej o impedancji charakterystycznej 60 Ω.

współdziałając z wektorem natężenia pola magnetycznego, również wytwarza wektor Poyntinga, który skierowany jest w stronę osi przewodu wewnętrznego:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\left(E_z \mathbf{i}_z \times H_\varphi \mathbf{i}_\varphi\right) = -\frac{1}{2} E_z H_\varphi \mathbf{i}_r , \tag{26}$$

Można teraz obliczyć moc wnikającą do przewodu na odcinku jednostkowym. Ponieważ wartość wektora na powierzchni przewodu jest stała, nie jest konieczne całkowanie. Otrzymuje się:

$$P = S \cdot 2\pi a \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{J_z}{\sigma} \cdot \frac{I_0}{2\pi a} \cdot 2\pi a = \frac{1}{2} \frac{I_0^{\,2}}{\pi a^2 \sigma} = \frac{1}{2} I_0^{\,2} \cdot R_j , \tag{27}$$

gdzie $R_j = \frac{1}{\pi a^2 \sigma}$ jest rezystancją odcinka przewodu wewnętrznego o długości jednostkowej. Otrzymany wynik pokazuje, że ta składowa wektora Poyntinga reprezentuje straty energii na ciepło. Analogiczne rozważanie można przeprowadzić dla przewodu zewnętrznego. Ze względu na zmianę kierunku prądu wektor **S** będzie teraz skierowany w przeciwnym kierunku niż poprzednio i będzie reprezentował straty w przewodzie zewnętrznym.

Ostatnim zadaniem jest obliczenie całkowitej mocy *P* przesyłanej linią współosiową. W tym celu należy scałkować wyrażenie (26) po powierzchni przekroju poprzecznego *A* struktury:

$$P = \int_A \mathbf{S}\,\mathrm{d}\mathbf{A} = \int_a^b \int_0^{2\pi} \mathbf{S} \cdot r\,\mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathbf{i_z} = \frac{U_0 I_0}{4\pi \log b/a} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{1}{2} U_0 I_0 . \tag{28}$$

Z relacji tej wynika, że w przypadku określania mocy korzystanie z wektora Poyntinga jest zbyteczne, gdyż cała informacja jest zawarta w napięciach i prądach. Podobny wynik można otrzymać dla każdej struktury przesyłającej moc na częstotliwościach energetycznych. Dla linii wieloprzewodowych, np. dla sieci trójfazowej z przewodem zerowym wystąpią trzy napięcia i trzy prądy, które muszą być zdefiniowane w sposób niezależny.

PODSUMOWANIE

W pracy rozważono jednokierunkowy przypadek **propagacji fali/przesyłu mocy** wzdłuż jednorodnej struktury (linii przesyłowej), której wymiary poprzeczne są małe w stosunku do długości fali, co jest przypadkiem energetyki. Wychodząc od równań Maxwella, przeanalizowano możliwe rozkłady pola w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku propagacji oraz w kierunku propagacji. Wykazano, że w przypadku przekroju poprzecznego rozkład pola elektrycznego jest identyczny jak dla elektrostatyki, a rozkład pola magnetycznego jest magnetostacjonarny (tzn. odpowiadający przepływowi prądu stałego).

Dla konkretnego przykładu linii współosiowej wyprowadzono relacje wiążące pole elektryczne i magnetyczne w linii z napięciami i prądami oraz kształtem geometrycznym przekroju poprzecznego. Są to wzory (22) i (23) słuszne dla przypadku bezstratnego. Uwzględnienie małych strat przewodzenia sprowadziłoby się do zamiany **stałej fazowej β na stałą propagacji γ**. W Załączniku, w komentarzu do wzoru (Z7) objaśniono fizyczne interpretacje elementów wzoru (22), zawierającego opis rozkładu poprzecznego pola, jak i rozkładu podłużnego zależnego od materiału wypełniającego strukturę.

Wymnożenie wzorów (22) i (23) według relacji (24) dało poprzeczny rozkład gęstości mocy prowadzonej przez strukturę (25). W przypadku transmisji jednokierunkowej nie ma przesunięcia fazy pomiędzy polem elektrycznym i magnetycznym oraz napięciem i prądem, które są do pól odpowiednio proporcjonalne. Pokazano przydatność zależności (25) do określania powierzchniowej gęstości mocy (wektora Poyntinga), przenoszonej przez strukturę pomiędzy przewodami. (Pola wewnątrz przewodów są całkowicie zamieniane na ciepło).

Uzyskanie całkowitej mocy przenoszonej wymagało scałkowania relacji (25) po powierzchni przekroju poprzecznego linii. Uzyskana z wymnożenia i scałkowania pól relacja na moc całkowitą jest proporcjonalna do iloczynu prądu i napięcia. Pokazuje, że w przypadku energetyki, w której istnieje jednoznaczne powiązanie pól oraz napięć i prądów, stosowanie wektora Poyntinga do analizy przepływu mocy jest zbędne.

W transmisji dwukierunkowej może się pojawić przesunięcie fazy pomiędzy napięciem i prądem powodowane przez obciążenie reaktancyjne. W podejściu energetycznym występuje wtedy problem mocy biernej, a w podejściu linii transmisyjnych wyższych częstotliwości pojawia się fala odbita. W tym ostatnim podejściu nie ma problemu mocy biernej, gdyż są dwie moce czynne poruszające się w przeciwnych kierunkach. Omówienie tych zagadnień wraz z dyskusją przedstawiono w pracy [9].

ZAŁĄCZNIK

Określenie rozkładu pola elektrycznego i magnetycznego w linii współosiowej dla fali TEM

Z.1. Rozkład pola elektrycznego

Rozkład pola poprzecznego $\mathbf{E_t}$ określa się z rozkładu potencjału (wzór (8)), który można uzyskać, rozwiązując równanie Laplace'a z następującymi warunkami brzegowymi: na powierzchni zewnętrznej S_1 potencjał $u_1 = 0$ i na powierzchni wewnętrznej S_2 potencjał $u_2 = U_0$. Kształt struktury (rys. 4) sugeruje zastosowanie walcowego układu współrzędnych posiadającego zmienne r, φ i z. Ponieważ rozważa się tylko przekrój poprzeczny, pomija się składową z. Symetria układu powoduje, że nie będzie zależności od zmiennej kątowej φ. Pozostaje więc tylko

rozwiązanie jednowymiarowe ze względu na zmienną radialną r. Laplasjan w układzie współrzędnych walcowych przyjmuje postać:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{=0} \tag{Z1}$$

Po opuszczeniu zmiennych φ i z oraz przyrównaniu do zera otrzymuje się:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) = 0\,. \tag{Z2}$$

Po scałkowaniu uzyska się:

$$u = C_1 \cdot \ln r + C_2\,. \tag{Z3}$$

Znalezienie stałych C_1 i C_2 wymaga uwzględnienia warunków brzegowych:

$$u(a) = C_1 \cdot \ln a + C_2 = U_0 \quad u(b) = C_1 \cdot \ln b + C_2 = 0\,. \tag{Z4}$$

Ostatecznie otrzymuje się rozkład potencjału w funkcji promienia w postaci:

$$u(r) = U_0 \frac{\ln r/b}{\ln a/b}\,. \tag{Z5}$$

Rozkład pola elektrycznego w linii współosiowej, po wykorzystaniu relacji (8): $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,U$, która wymaga obliczenia pochodnej po r z wyrażenia (Z5) i uwzględnienia wersora $\mathbf{i}_r$ oraz po uwzględnieniu zależności od z według wzoru (21), można zapisać w postaci:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\mathrm{t}\,\mathrm{e}^{-j\beta\cdot z} = \frac{U_0 \mathbf{i}_r}{r \ln b/a}\mathrm{e}^{-j\beta\cdot z}\left[\mathrm{V/m}\right]. \tag{Z6}$$

W zależności tej, w której $\mathbf{E}_\mathrm{t}$ jest już teraz **rozkładem amplitudy zespolonej**[15] wektora pola elektrycznego, można uwidocznić szereg elementów odpowiedzialnych za różne efekty fizyczne:

$$\mathbf{E} = \underbrace{U_0}_{A} \cdot \underbrace{\frac{1}{\ln b/a}}_{B} \cdot \underbrace{\frac{\mathbf{i}_r}{r}}_{C} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-j\beta\cdot z}}_{D}\left[\mathrm{V/m}\right], \tag{Z7}$$

[15] Należy pamiętać o nieuwidocznionej zależności od czasu w postaci $\mathrm{e}^{j\omega t}$. Amplituda zespolona **E** lub **H** jest tu liczbą zespoloną, której faza jest określona dla miejsca $z = 0$ i czasu $t = 0$. W innym miejscu i czasie należy dodać $\omega t - \beta z$.

gdzie:

A – amplituda zespolona napięcia pomiędzy przewodami, czyli stała związana z wielkością pobudzenia linii,

B – stała związana z kształtem geometrycznym struktury prowadzącej falę,

C – opisuje rozkład pola **E** w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku propagacji,

D – opisuje zmiany pola w kierunku propagacji. Moc jest przenoszona wyłącznie w kierunku *z*. Nie ma fali poruszającej się w kierunku przeciwnym.

W wyrażeniu tym stała propagacji:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\,, \tag{Z8}$$

gdzie λ jest długością fali rozchodzącej się w kierunku *z*, określoną przez parametry elektryczne μ i ε ośrodka wypełniającego strukturę.

Z.2. Rozkład pola magnetycznego

Określenie rozkładu pola magnetycznego powinno się rozpocząć od równania (18b): $\nabla_{\mathbf{t}} \times \mathbf{H}_{\mathbf{t}} = J_z \mathbf{i}_z$. Wykorzystuje się to równanie tylko do stwierdzenia, że jedyną składową poprzeczną pola wytwarzaną przez gęstość prądu J_z jest składowa H_φ[16]. Dalej wygodniej będzie skorzystać z postaci całkowej prawa Ampera (2c). Po usunięciu pochodnej po czasie (ω ≈ 0) prawa strona jest amplitudą całkowitego prądu, płynącego przewodem wewnętrznym:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = I_0\,. \tag{Z9}$$

W równaniu tym powierzchnia S jest fragmentem przekroju poprzecznego struktury w postaci koła o promieniu $r > a$ (dowolna linia przerywana na rys. 4), a L jest brzegiem tego koła. Element $\mathrm{d}\mathbf{l} = r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathbf{i}_\varphi$, jest więc równoległy do H_φ. Całka przyjmuje tu postać:

$$\int_0^{2\pi} H_\varphi r\, \mathrm{d}\varphi = I_0\,, \tag{Z10}$$

z której otrzymuje się $H_\varphi = I_0/2\pi r$. Ostatecznie pole magnetyczne wewnątrz linii współosiowej, którego amplitudą zespoloną jest $\mathbf{H}_{\mathbf{t}}$, można zapisać jako[17]:

---

[16] Po rozpisaniu lewej strony równania pojawią się pochodne $\partial H_\varphi/\partial r$ i $\partial H_r/\partial\varphi$. Ta druga musi znikać ze względu na osiową symetrię struktury. Teoretycznie mogłaby istnieć stała składowa H_ρ, ale nie byłaby ona związana z gęstością prądu **J**, tylko np. ze stałym polem magnetycznym, np. gdyby przewód wewnętrzny był biegunem N magnesu, a przewód zewnętrzny S. J_z wytwarza tylko H_φ.

[17] Tylko prąd płynący w przewodzie wewnętrznym daje wkład do pola magnetycznego pomiędzy przewodem wewnętrznym i zewnętrznym. Prąd w przewodzie zewnętrznym, płynący w przeciwnym kierunku, likwiduje tylko na zewnątrz linii współosiowej pole magnetyczne, pochodzące od przewodu wewnętrznego.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\mathrm{t}}\,\mathrm{e}^{-j\beta\cdot z} = \frac{I_0\mathbf{i}_{\varphi}}{2\pi r}\mathrm{e}^{-j\beta\cdot z}\left[\mathrm{A/m}\right]. \tag{Z11}$$

Mając rozkłady przestrzenne obu wektorów **E** i **H** (wzory (Z6) i (Z11)), można teraz określić rozkład gęstości mocy przesyłanej tą linią, co przeprowadzono w części głównej pracy.

LITERATURA

1. Cekareski Z., Emanuel A.E., *On the physical meaning of nonactive powers in three-phase systems*, Power Engineering Review, IEEE, Vol.19, 1999, No. 7, s. 46–47.
2. Czarnecki L.S., *Could power properties of three-phase systems be described in terms of the Poynting Vector?* IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 21, 2006, No. 1, s. 339–344.
3. Czarnecki L.S., *Currents' Physical Components (CPC) in circuits with nonsinusoidal voltages and currents. Part 1: Single-phase linear circuits*, Journal on Electric Power Quality and Utilization, Vol. XI, 2005, No. 2, s. 37–48. *Part 2: Three-phase linear circuits.*
4. Czarnecki L.S., *Energy flow and power phenomena in electrical circuits: illusions and reality*, Archiv. für Elektrotechnik, 1999, No. 4(82), s. 10–15.
5. Czarnecki L.S., *Harmonics and power phenomena*, Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering, John Wiley & Sons, Supplement 1, 2000, s. 195–218.
6. Czarnecki L.S., *Misinterpretations of some power properties of electric circuits*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 9, 1994, No. 4, s. 1760–1770.
7. Czarnecki L.S., *On some misinterpretations of the Instantaneous Reactive Power p-q Theory*, IEEE Transactions on Power Electronics, Vol.10, 2004, No. 3, s. 828–836.
8. Czarnecki L.S., *Oscylacje energii a moce nieaktywne w świetle Teorii Składowych Fizycznych Prądu (CPC) oraz Twierdzenia Poyntinga*, „Przegląd Elektrotechniczny", 2006, nr 6, s. 1–7.
9. Dębicki P.S., *Granice techniki mikrofalowej – oscylacje mocy biernej w energetyce i fale w obwodach prądu stałego*, https://www.researchgate.net/publication/302028150).
10. Emanuel A.E., *About the rejection of Poynting vector in power systems analysis*, Journal on Electric Power Quality and Utilization, Vol. XIII, 2007, No. 1.
11. Emanuel A.E., *Power definitions and the physical mechanism of power flow*, Hoboken, John Wiley, New Jersey 2010.
12. Emanuel A.E., *Powers in nonsinusoidal situations. A review of definitions and physical meaning*, IEEE Transactions on Power Delivery, 1990, No. 5(3),
13. Emanuel A.E., *Poynting Vector and physical meaning of nonactive powers*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements, Vol. 54, 2005, No. 4, s. 1457–1462.
14. Ferrero A., Leva S., Morando A.P., *An approach to the nonactive power concept in terms of the Poynting-Park Vector*, European Transactions on Electric Power, ETEP, Vol. 11, 2001, No. 5, s. 301–308.
15. Piotrowski T.S., *Spór o sens fizyczny mocy biernej*, VI Konferencja „Elektrotechnika – prądy niesinusoidalne", materiały konferencyjne, Zielona Góra 2002, s. 47–54.

IS THE POYNTING VECTOR A NECESSERY TOOL TO ANALYSE NONACTIVE POWER?

Summary

The paper is addressed to the electrical engineers who are interested in a non-active power analysis in power lines. The Poynting vector application, as a necessary tool to explain physical phenomenon, has been suggested in some papers. The reader is guided through the chosen problems of the electromagnetic theory in an accessible way, in order to explain to him why in the analysis of 50 Hz power, which is transmitted along uniform multi-wire line, the application of the Poynting vector is unnecessary. Nevertheless, the Poynting vector could be useful in the analysis of the 3D density distribution of the power transferred between wires of the line.

The influence of the sources and loadings is not analysed in this paper. It could be taken into account by creating a superposition of solutions obtained in this paper, which is discussed in an accompanying paper [9].

Keywords: *reactive power, nonactive power, power oscillating, Poynting vector, Maxwell's equations, field analysis, quasi-stationary fields, wave/power propagation, transvers field distribution, Laplace equation, coaxial line.*