

WYBRANE ASPEKTY ANALIZY DANYCH POMIAROWYCH ZŁOŻONEGO SYSTEMU ENERGETYCZNEGO POD KĄTEM ZACHOWAŃ CHAOTYCZNYCH

METHODS OF ANALYSIS OF CHAOTIC BEHAVIOR OF MEASUREMENT DATA OF A COMPLEX ENERGY SYSTEM

Piotr Jankowski

Akademia Morska w Gdyni, Morska 81-87, 81–225 Gdynia, Wydział Elektryczny,
Katedra Elektroenergetyki Okrętowej, e-mail: p.jankowski@we.am.gdynia.pl

Streszczenie: W artykule przedstawiono przykład zachowania chaotycznego w wybranym fragmencie sieci elektroenergetycznej zamodelowanej nieliniowym układem równań różniczkowych. Artykuł omawia najistotniejsze aspekty identyfikacji zachowań chaotycznych w systemie na podstawie zarejestrowanego przebiegu czasowego tylko jednej zmiennej stanu bez znajomości wymiaru rzeczywistej przestrzeni fazowej.

Słowa kluczowe: chaos, mapa Poincarego, wymiar zanurzenia, wykładnik Lapunowa.

Abstract: The article presents an example of chaotic behavior in a selected piece of the power network modeled by nonlinear system of differential equations. This article also discusses the most important aspects of identifying chaotic behavior in a system, based on only the recorded time course of one state variable without knowing the real dimension of the phase space.

Keywords: chaos, Poincare map, embedding dimension, Lyapunov exponent.

1. WSTĘP

Nieregularną i nieprzewidywalną ewolucję nieliniowych układów dynamicznych przyjęto nazywać chaosem. Charakterystyczną cechą takiego stanu jest fakt, że układ nie powtarza nawet w przybliżeniu swoich zachowań. Stan chaotyczny może wystąpić w wielu układach technicznych, opisanych układem równań nieliniowych, często nieposiadającym rozwiązania analitycznego. Układy te są najczęściej wrażliwe, czyli niewielka zmiana jakiegokolwiek parametru może mieć wpływ na wynik końcowy. Stwarza to dodatkowe problemy związane z koniecznością rozwiązywania tych równań metodami numerycznymi (a więc przybliżonymi). Biorąc pod uwagę, że liczba ma swoją ograniczoną reprezentację w maszynie cyfrowej

w postaci określonej liczby cyfr (np. w programie Mathcad 17 cyfr), należy się spodziewać trudności w osiągnięciu wymaganej dokładności przy rozwiązywaniu takich wrażliwych układów. Teoria chaosu osiągnęła szybki rozwój, wykorzystując układy dynamiki nieliniowej, które można opisać równaniami analitycznymi. Rozwój ten widoczny jest szczególnie w przypadku układów z trzema zmiennymi stanu, co jest jeszcze interpretowalne graficznie [Milos i Schreiber 1991; Schuster 1997; Hirsch, Smale i Devaney 2004]. Wówczas łatwo można jako kryterium jakościowe identyfikacji chaosu zastosować jedno z podawanych przez Schustera:

- chaotyczny wygląd przebiegu czasowego (orbity);
- szerokopasmowy szum w widmie mocy;
- zanik funkcji autokorelacji;
- wypełniona przestrzeń mapy Poincarego.

Wśród kryteriów jakościowych nie może zabraknąć pojęcia atraktora, rozumianego jako obszar w przestrzeni fazowej, który jest asymptotycznie osiągalny przez trajektorię. O chaotyczności świadczy subiektywny kształt atraktora, zwanego dziwnym.

Oprócz wskaźników jakościowych w teorii chaosu definiuje się szereg wskaźników ilościowych, takich jak: wykładnik Lapunowa, entropia, wymiar pojemnościowy, wymiar korelacyjny itp. Najczęściej wykorzystywany do identyfikacji stanu chaosu jest tzw. wykładnik Lapunowa $\lambda(x_0)$, definiowany jako miara oddalania się punktów, równa po n iteracjach wartości określonej w (1):

$$f^n(x_0 + \Delta_0) - f^n(x_0) = \Delta_n = \Delta_0 e^{n\lambda(x_0)} \quad (1)$$

W postaci jawnej współczynnik $\lambda(x_0)$ można wyznaczyć po prostych przekształcenia (1) do postaci (2) [Schuster 1997]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(x_{k-1})| = \lambda(x_0) \quad (2)$$

Wzór (2) łatwo jest zaimplementować w przypadku obiektu opisanego układem równań, a zwłaszcza w sytuacji jednowymiarowego odwzorowania [Peitgen, Jürgens i Saupe 1996; Baker i Gollub 1998]. Niestety, w złożonych systemach np. takich jak system energetyczny czy sieć okrętowa, nie sposób jednoznacznie zamodelować równaniami analitycznymi pracy takiego systemu z uwzględnieniem choćby stanów morza, co może mieć również wpływ na przebiegi prądów i napięć. Wówczas wykładniki Lapunowa można oszacować, stosując rekonstrukcję przestrzeni fazowej metodą opóźnień, polegającą na odtworzeniu przestrzeni stanów na podstawie jednowymiarowego ciągu obserwacji.

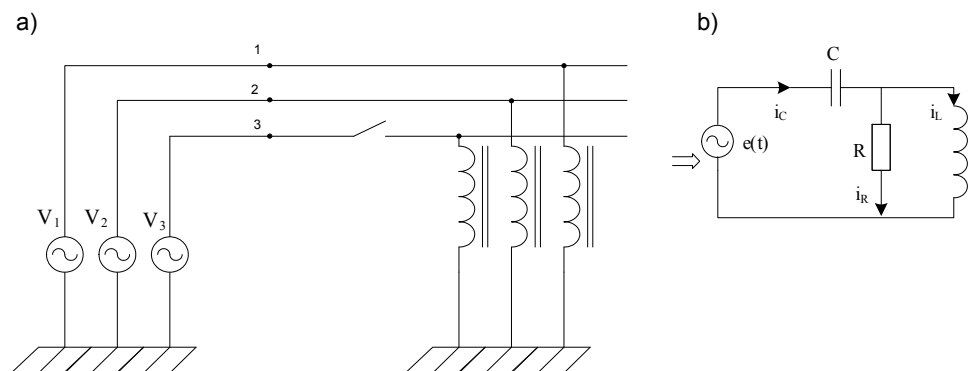
W artykule przedstawiono przykład zachowań chaotycznych, występujących w rzeczywistym systemie energetycznym pracującym w warunkach ferrozonansu. Zaprezentowano wyniki symulacji obwodu (do którego zredukowano system),

opisanego nieliniowym układem równań różniczkowych oraz na ich podstawie wyznaczono atraktory i portrety fazowe dla dwóch skrajnych przypadków, dla których układ pracował stabilnie lub chaotycznie. Ponadto omówiono najczęściej stosowaną metodę postępowania przy rekonstrukcji przestrzeni fazowej, umożliwiającej wyznaczenie widma wykładników Lapunowa w sytuacji braku opisu systemu równaniami analitycznymi, wykorzystując pomiarowy szereg czasowy jednej zmiennej stanu.

2. PRZYKŁAD ZACHOWAŃ CHAOTYCZNYCH W SIECI ENERGETYCZNEJ

Jako przykład występowania zachowań chaotycznych w elektrotechnice można wskazać wybrane wyniki analizy modelu systemu elektroenergetycznego w stanie ferorezonansu.

Na rysunku 1 przedstawiono fragment takiego systemu zasilającego nieobciążony transformator trójfazowy przy przerwie w jednej fazie.



Rys. 1. System energetyczny: a) fragment systemu, b) zredukowany do dwuoczkowego obwodu

Fig. 1. Power system: a) power system, b) reduced to the circumferential circuit

Z kolei uwzględniając pojemności międzyfazowe i doziemne, układ można sprowadzić do prostego, aczkolwiek nieliniowego, dwuoczkowego obwodu (rys. 1b). Przypadek zachowań chaotycznych dla stanu ferorezonansu był szczegółowo prezentowany [Araujo, Marti i Soudack 1993; Jankowski 2015]. W początkowych rozważaniach charakterystykę magnesowania transformatora aproksymowano za pomocą wielomianu 3. stopnia, co prowadziło do opisu obwodu z rysunku 1a równaniem Duffinga. Jednak w dalszych badaniach wykazano, że dokładniejszym odwzorowaniem elementu nieliniowego rozpatrywanego układu będzie aproksy-

macja wielomianem stopnia $n = 11$ [Araujo, Marti i Soudack 1993]. Parametry występujące w obwodzie z rysunku 1b zależą od rodzaju mocy transformatora i linii zasilającej oraz jej długości.

Parametry, które przyjęto dla przeprowadzenia badań symulacyjnych w środowisku Mathcad, przedstawiono w tabeli 1. Uwzględniając nieliniową charakterystykę magnesowania $i_L = a\Psi + b\Psi^n$, obwód z rysunku 1 opisuje układ równań (3), który po sprowadzeniu do postaci normalnej można bezpośrednio zastosować do procedury, np. *Rkfixed*.

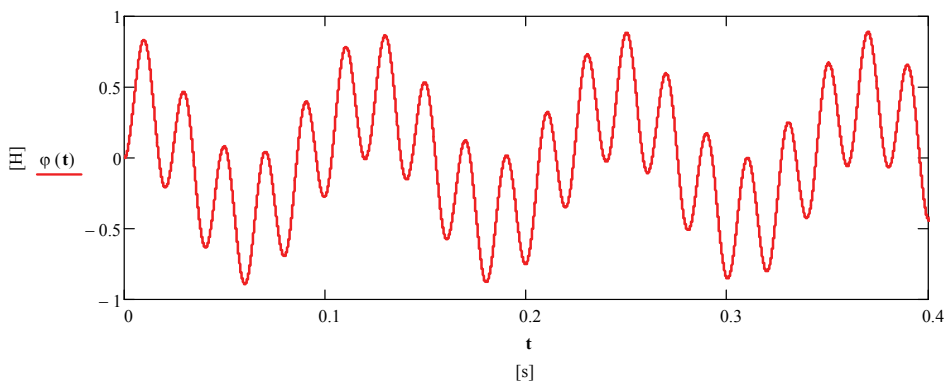
$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = -u_c + e(t) \\ \frac{1}{R} \frac{d\varphi}{dt} - C \frac{du_c}{dt} = -a\varphi - b\varphi^n \end{cases} \quad (3)$$

Tabela 1. Parametry dla obwodu ferrezonansowego z rys.1

Table 1. Parameters for the ferro-resonant circuit shown in Fig. 1

$e(t) = E_m \sin(\omega t)$	$a[\text{A/Wb}]$	$b[\text{A/Wb}^{11}]$	$C[\text{nF}]$	$R[\Omega]$
$E_m = 0.135/13.5 \text{ kV}$	2.8×10^{-3}	7.2×10^{-3}	1250.77	10^{20}

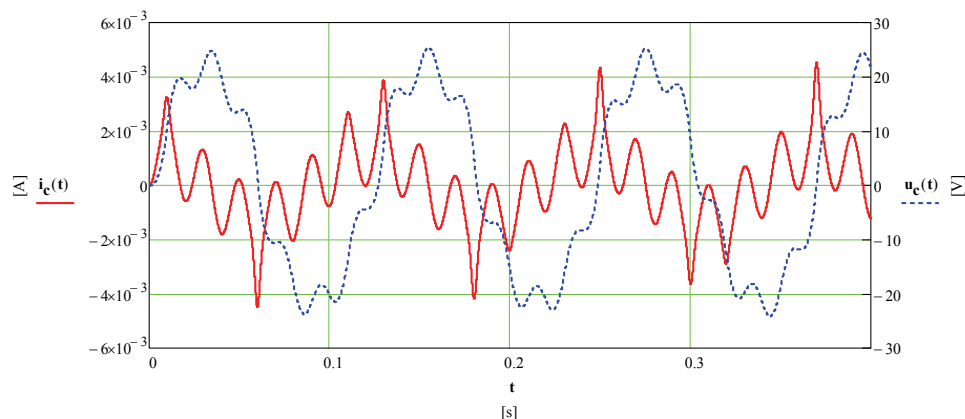
Uzyskany w wyniku symulacji przebieg strumienia przy zasilaniu niskim napięciem o amplitudzie 135 V (rys. 2) charakteryzuje się powtarzalnością pomimo odpowiedzi niesinusoidalnej.



Rys. 2. Przebieg strumienia dla niskiego napięcia zasilania $E_m = 135 \text{ V}$

Fig. 2. Flux course for low power supplying $E_m = 135 \text{ V}$

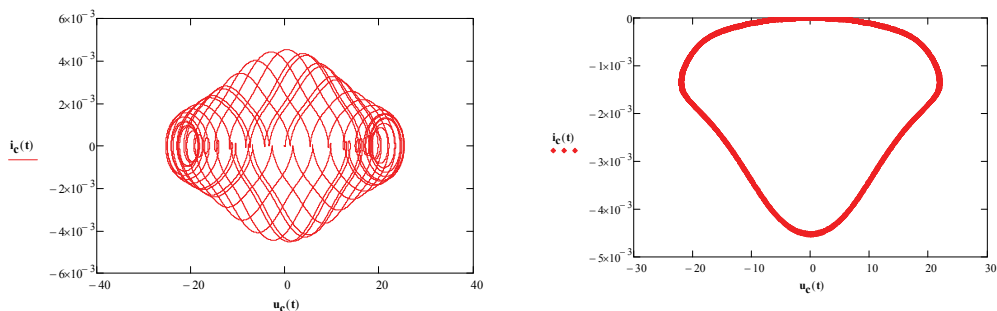
Podobną regularnością charakteryzują się przebiegi prądu i napięcia kondensatora z rysunku 3.



Rys. 3. Przebieg prądu i napięcia kondensatora dla niskiego napięcia zasilania $E_m = 135\text{ V}$

Fig. 3. Current waveform and capacitor voltage for low power supply $E_m = 135\text{ V}$

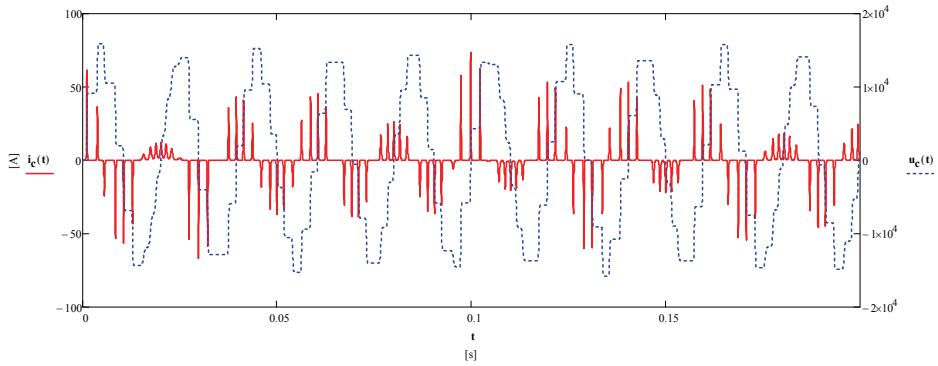
Na rysunku 4 przedstawiono konstrukcje trajektorii fazowej oraz stroboskopowej mapy Poincarego dla zmiennej napięcie – pochodna napięcia kondensatora (czyli po pomnożeniu przez C prąd kondensatora). Jak widać, cechą charakterystyczną mapy Poincarego dla tego przypadku jest jej kształt w postaci krzywej zamkniętej.



Rys. 4. Portret fazowy i mapa Poincarego napięcia kondensatora dla $E_m = 135\text{ V}$

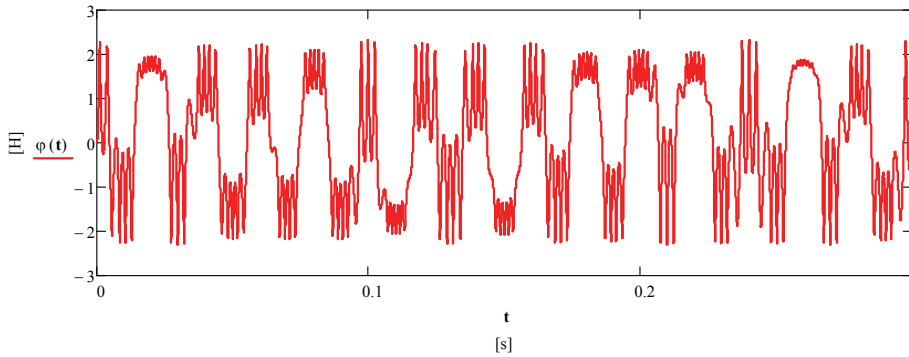
Fig. 4. Phase portrait and Poincare map for the capacitor voltage $E_m = 135\text{ V}$

Z kolei przy zmianie napięcia zasilania do wartości amplitudy $E_m = 13,5\text{ kV}$ przebiegi zarówno strumienia, jak i prądu i napięcia kondensatora nie charakteryzują się taką regularnością (brak powtarzalności) (rys. 5, 6). Tym razem mapa Poincarego lepiej odzwierciedla ten stan, który można uznać za chaotyczny, gdyż punkty tej mapy wypełniają pewien obszar (rys. 7) [Schuster 1997].



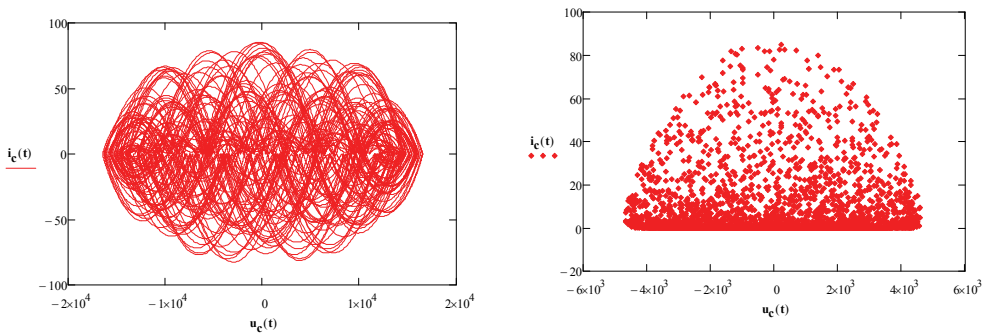
Rys. 5. Przebieg prądu i napięcia kondensatora dla napięcia zasilania $E_m = 13,5$ kV

Fig. 5. Current waveform and capacitor voltage for power supply $E_m = 13,5$ kV



Rys. 6. Przebieg strumienia dla napięcia zasilania $E_m = 13,5$ kV

Fig. 6. Flux course for power supplying $E_m = 13,5$ kV



Rys. 7. Portret fazowy i mapa Poincarego napięcia kondensatora dla $E_m = 13,5$ kV

Fig. 7. Phase portrait and Poincare map for the capacitor voltage $E_m = 13,5$ kV

3. REKONSTRUKCJA PRZESTRZENI FAZOWEJ

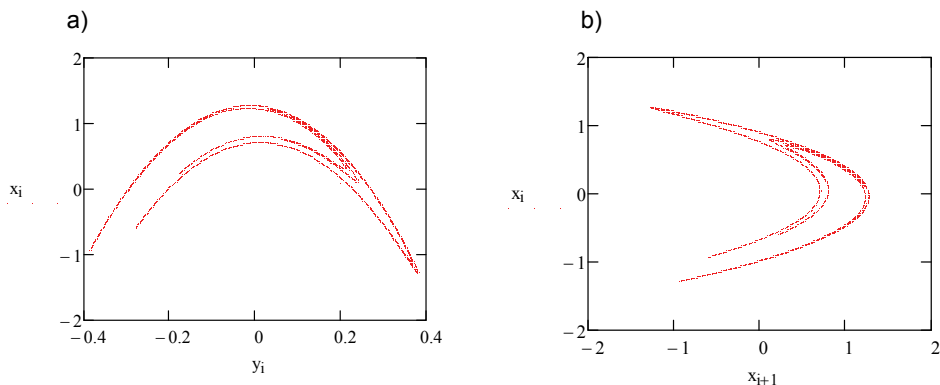
Wiedza na temat wymiaru przestrzeni fazowej rozpatrywanego układu dynamicznego jest bardzo pożądana, ale często nieznana, zwłaszcza gdy dysponuje się pomiarem jednej zmiennej stanu wykonanym w złożonym układzie [Kennel, Brown i Abarbanel 1992; Marwan i in. 2007] (np. elektroenergetyczny system okrętowy). Powstaje pytanie, czy mając do dyspozycji wyniki pomiarowe jednej zmiennej stanu można odtworzyć atraktor. Idea taka, zwana metodą opóźnień, została przedstawiona w pracach Packarda i Takensa, a opiera się na fakcie, iż każda wartość zmiennej dla danej chwili (kroku) jest bezpośrednio lub pośrednio zależna od pozostałych zmiennych w kroku poprzednim. Dla zobrazowania skuteczności tej metody zastosowano ją do znanego dwuwymiarowego odwzorowania Henona.

Poniżej przedstawiono prostą procedurę, generującą atraktor na podstawie dwóch zmiennych. Jednocześnie wygenerowano drugi atraktor, korzystając tylko z rozwiązania zmiennej x , przy czym na jednej osi jest oryginalny szereg x_i , a na drugiej – szereg opóźniony x_{i+1} . Jak widać na rysunku 8, uzyskane atraktory zachowują znaczące podobieństwo. Atraktor uzyskany w powyższy sposób na podstawie jednego szeregu nazywa się zrekonstruowanym atraktorem (lub zrekonstruowaną przestrzenią fazową). Jego fundamentalną cechą stanowi jednakowy wymiar fraktalny i te same wartości wykładników Lapunowa, co w rzeczywistej przestrzeni fazowej [Ruelle 1989].

Procedura odwzorowania Henona:

$$i := 0..10000 \quad a := 1.4 \quad b := 0.3$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} 1 + y_i - a \cdot (x_i)^2 \\ b \cdot x_i \end{bmatrix}$$



Rys. 8. Atraktor Henona: a) rzeczywisty, b) zrekonstruowany

Fig. 8. Henon attractor: a) original, b) reconstructed

W literaturze przedmiotu można znaleźć wiele przykładów atraktorów dla układów trzech zmiennych (tj. mających interpretację graficzną), zrekonstruowanych na podstawie jednej zmiennej stanu $x(t)$, tworząc dla każdej chwili czasowej następujący zbiór punktów $x(t)$, $x(t+\tau)$, $x(t+2\tau)$ [Milnor 1985; Eckman i in., 1986; 1987; Abarbanel, Brown i Kadtke 1990; Marwan i in. 2007]. Niestety, w praktyce wykonując pomiar jednej wielkości, najczęściej nie wiadomo dokładnie, jaki jest wymiar przestrzeni fazowej, a dla złożonych układów (np. sieci energetycznej) może być dużo większy od wartości interpretowalnej graficznie.

Aby zrekonstruować przestrzeń fazową, wykorzystuje się metodę fałszywych sąsiadów [Packard i in. 1980] (opartą na metodzie opóźnień) albo metodę stabilizacji wymiaru korelacyjnego [Kantz 1994]. Zakłada się, że dysponujemy szeregiem czasowym jednej zmiennej x_i , składającym z N punktów $i=1\dots N$. W ramach rekonstrukcji tworzy się macierz \mathbf{Y} , składającą się z tzw. wektorów opóźnień:

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+op}, \mathbf{x}_{i+2op}, \dots, \mathbf{x}_{i+(wz-1)op}] \quad (4)$$

Wektory macierzy \mathbf{Y} nazywane są wz -historiami, gdzie wz z kolei określany jest wymiarem zanurzenia (*embedding dimension*). Zakładając, że szeregi pomiarowe są rejestrowane ze stałym krokiem czasowym Δt , wymiarowe opóźnienie czasowe wynosi $\tau = op\Delta t$, gdzie op można nazwać bezwymiarowym opóźnieniem. Ponieważ liczba punktów pomiarowych jest równa N , a każdy szereg opóźniony powstaje przez przesunięcie o liczbę iteracji równą $op < N$, to warto zwrócić uwagę, że liczba wierszy macierzy \mathbf{Y} będzie mniejsza aniżeli N , jeżeli wszystkie szeregi \mathbf{x} mają być równoliczne. Macierz \mathbf{Y} po rozpisaniu ma postać:

$$\mathbf{Y}_{[N-(wz-1)op] \times [wz]} = \begin{bmatrix} x_1 & x_{1+op} & x_{1+2op} & \dots & x_{1+(wz-1)op} \\ x_2 & x_{2+op} & x_{2+2op} & \dots & x_{2+(wz-1)op} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k & x_{k+op} & x_{k+2op} & \dots & x_{k+(wz-1)op} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N-(wz-1)op} & x_{N-(wz-2)op} & x_{N-(wz-3)op} & \dots & x_N \end{bmatrix} \quad (5)$$

Powyższa rekonstrukcja przestrzeni fazowej (dla nieznanego atraktora o nieznanym wymiarze, np. m) nazywana jest zanurzeniem poszukiwanego atraktora w przestrzeni \mathbb{R}^{wz} . Zgodnie z twierdzeniem o zanurzeniu według Takensa, jeżeli: $wz \geq 2m+1$, to zrekonstruowana wz – wymiarowa przestrzeń fazowa będzie topologicznie równoważna z przestrzenią oryginalną, co oznacza niezmienniczość wymiaru entropii i spektrum wykładników Lapunowa obu atraktorów. Warunkiem wiarygodnego zrekonstruowania atraktora jest odpowiedni dobór wymiaru zanu-

rzenia wz i czasu opóźnienia op . Jest oczywiste, że bezwymiarowy czas opóźnienia jest liczbą całkowitą z przedziału $\langle 1; N \rangle$. Jednak wartość ta nie może być zbyt mała, gdyż współrzędne danego wektora Y_k stają się prawie równe sobie. Z kolei, jeżeli op jest zbyt duże, to współrzędne są tak daleko od siebie, że stają się nieskorelowane.

Wielu autorów twierdzi, że nie istnieje jednoznaczna metoda wyznaczania tych parametrów [Peters 1997; Baker i Gollub 1998; Zeug-Żebro 2000; Miśkiewicz-Nawrocka 2012] i sugeruje, że można je dobrać metodą prób i błędów.

3.1. Wybór opóźnienia czasowego (op)

Jedną z podstawowych sugestii wyboru czasu opóźnienia według Fräsera polega na sprawdzeniu, czy szereg charakteryzuje się jakąkolwiek okresowością oraz przyjęciem wartości op „nieco” mniejszej od tegoż okresu [Fraser i Swinney 1986]. Bardziej bezpośrednie podejście polega na wyznaczeniu zależności korelacji między parami punktów, jako funkcji odstepu τ pomiędzy nimi. Jeżeli znajdzie się pierwsze miejsce zerowe tej funkcji (τ_0), to [Baker i Golub 1998] proponują przyjąć czas opóźnienia jako „umiarkowaną” część τ . Z kolei jeszcze częściej stosowana metoda oszacowania czasu op opiera się na wyznaczeniu tzw. informacji wzajemnej, będącej miarą prawdopodobieństwa, że sąsiednie punkty danych x_i oraz x_{i+op} nie są zależne statystycznie.

W tym celu bada się funkcję, zwaną funkcją średniej informacji wzajemnej (*Average Mutual Information* – AMI) [Baker i Golub 1998; Wysocki 2012]:

$$AMI(op) = \sum_i P(X_0 = x_i, X_{op} = x_{i+op}) \cdot \log_2 \frac{P(X_0 = x_{i+op}, X_i = x_{i+op})}{P(X_0 = x_i) \cdot P(X_i = x_{i+op})} \quad (6)$$

Jeżeli funkcja AMI ma minimum lokalne, to czas opóźnienia przyjmuje się dla op^* , dla której ta funkcja przyjmuje pierwsze minimum.

3.2. Wybór wymiaru zanurzenia (wz)

Wśród różnych metod oszacowania wymiaru zanurzenia najczęściej opisywane są dwie. Jedną opartą jest na całce korelacyjnej według algorytmu Grassbergera i Procacciego, a drugą to wspomniana metoda fałszywych sąsiadów.

Całka korelacyjna wyraża prawdopodobieństwo znalezienia pary punktów atraktora w ustalonej od siebie odległości (np. ε) (7):

$$C_k(op^*, wz, \varepsilon) = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=j+1}^k I(\varepsilon - d(Y_i, Y_j))}{\binom{k}{2}} \quad (7)$$

gdzie $k = N - (wz - 1)op^*$.

Na podstawie (7) określany jest z kolei wymiar korelacyjny (8)

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log C_k(op^*, wz, \varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (8)$$

Sposób postępowania w algorytmie Grassbergera i Procacciego polega na wyznaczeniu wymiarów korelacyjnych dla wzrastających wartości zakładanych wymiarów zanurzenia wz . Minimalnym (wystarczającym) wymiarem zanurzenia jest wz^* , powyżej którego D_C już się nie zmienia [Wysocki 2012]. Z kolei Peters zamiast określać D_C wprost ze wzoru (8) proponuje dokonać regresji liniowej dla punktów o współrzędnych: $(x, y) = (\log(C_k), \log(\varepsilon))$ i na tej podstawie wyznaczyć wymiar korelacyjny, jako nachylenie prostej: $y = D_C \cdot x + b$ [Peters 1997]. Należy podkreślić, że korzystanie z danych doświadczalnych, obarczonych nawet niewielkim szumem, może zredukować przedział zależności liniowej i spowodować istotną niedokładność oszacowania wymiaru zanurzenia. Z tego powodu chętniej stosowanym sposobem oszacowania wartości minimalnego wymiaru zanurzenia jest wspomniana metoda fałszywych najbliższych sąsiadów. Trzeba określić względną zmianę odległości pomiędzy dwoma różnymi punktami atraktora Y_i^{wz+1}, Y_j^{wz+1} , zanurzonymi w przestrzeni \mathbb{R}^{wz+1} i ich odpowiednikami w \mathbb{R}^{wz} (9):

$$R_{op^*, wz} = \frac{\sqrt{[d(Y_i^{wz+1}, Y_j^{wz+1})]^2 - [d(Y_i^{wz}, Y_j^{wz})]^2}}{d(Y_i^{wz}, Y_j^{wz})} > R_{lim} \quad (9)$$

gdzie $d(Y_i^{wz}, Y_j^{wz})$ – odległość euklidesowa.

Jeżeli dla określonej granicznej wartości spełniona jest nierówność (9), to oznacza, że punkt Y_j^{wz} nie jest najbliższym sąsiadem punktu Y_i^{wz} (jest fałszywym najbliższym sąsiadem). Wyznaczając wykres liczby fałszywych sąsiadów w funkcji wymiaru zanurzenia wz , jako „optymalną” wartość wz^* przyjmuje się tę, dla której liczba fałszywych najbliższych sąsiadów jest najmniejsza. Zagadnieniem odrębnym (tu nieopisywanym) jest wybór wartości granicznej [Zeug-Żebro 2000].

4. MAKSYMALNY WYKŁADNIK LAPUNOWA

W sytuacji dysponowania jednym szeregiem czasowym bardzo trudno wyznaczyć jest całe widmo wykładników Lapunowa ze względu na niedostatek danych [Kantz 1994; Peters 1997; Kantz i Schreiber 2004]. Możliwe jest natomiast wyznaczenie najważniejszego z nich, mierzącego średnie tempo rozbieżności trajektorii, tj. największego wykładnika Lapunowa. Odległość po n iteracjach występującą we wzorze (1) można przy znajomości wymiaru zanurzenia i czasu opóźnienia otrzymanego w procesie rekonstrukcji przestrzeni fazowej, obliczyć według następujących formuł [Zeug-Żebro 2000]:

$$\Delta_n = \Delta_0 e^{n\lambda(x_0)} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[\frac{1}{K} \sum_{j=1}^K |x_{i+n} - x_{i_j+n}| \right] \quad (10)$$

gdzie:

$x_{i_j} - j$ -ty (spośród K) najbliższy sąsiad trajektorii x_i ,

$M = N - (wz-1)op$ – liczba punktów trajektorii zależna od wymiaru zanurzenia i czasu opóźnienia.

Należy zauważyć, że po zlogarytmowaniu lewej części (10) otrzymuje się następujące równanie prostej:

$$\ln(\Delta_n) = \ln(\Delta_0) + \lambda_{\max} n \quad (11)$$

Ostateczne wyznaczenie maksymalnego wykładnika Lapunowa polega na wyznaczeniu punktów $((\ln(\Delta_n), n))$ i określeniu współczynnika regresji λ_{\max} .

5. PODSUMOWANIE

Zagadnienia związane z pojawianiem się dziwnych nieregularnych zachowań zarówno wyników rozwiązania nieliniowych układów dynamicznych, jak i przebiegów pomiarowych w różnych systemach, np. elektroenergetycznych, odnosi się do chaosu, zwanego deterministycznym. Wskaźniki definiowane dla deterministycznego chaosu są istotne nie tylko dla identyfikacji niepożądanego stanu, ale mogą być również wykorzystane jako kryterium stabilności badanego systemu [Małyszko 2016]. W przypadku jednak wyników pomiarowych należy pamiętać, że wielkość, którą chcemy zmierzyć, może być obciążona nie tylko deterministycznymi zakłóceniami, ale również szumem losowym, którego odfiltrowanie może być nieskuteczne ze względu na pasmo częstotliwości zbliżone do pasma sygnału głównego.

Przedstawiona metoda najbliższych sąsiadów pozwala nie tylko na wyznaczenie wykładników Lapunowa, ale może być również zastosowana do identyfikacji czy badany przebieg nie zawiera takiego sygnału losowego [Miśkiewicz-Nawrocka 2012]. Należy jednak podkreślić, że na wartość wyznaczanego wykładnika mają wpływ wartości parametrów zrekonstruowanej przestrzeni stanów (wz, op), liczba najbliższych sąsiadów K oraz przyjęta metryka.

Jak podkreśla wielu autorów [Peters 1997; Baker i Golub 1998; Miśkiewicz-Nawrocka 2012], parametry te można tylko oszacować według różnych metod. Na przykład według Petersa najlepsze opóźnienie czasowe można określić jako stosunek średniego okresu orbitalnego (czasu, po którym zanika korelacja pomiędzy przebiegami czasowymi) i wymiaru pojemnościowego.

Istnieje wiele procedur, które oferują wyznaczenie maksymalnego wykładnika Lapunowa lub nawet widma, jeżeli argumentami jest więcej szeregów czasowych. Wśród najczęściej stosowanych wymienić można procedury Wolfa, Rosensteina oraz Eckmanna [Wolf i in. 1985; Eckmann i in. 1986; 1987; Rosenstein, Collins i De Luca 1993]. Badanie przydatności tych dwóch ostatnich omówiono w następnym artykule autorstwa Hallmanna i Jankowskiego.

LITERATURA

- Abarbanel, H.D.I., Brown, R., Kadtke, J.B., 1990, *Prediction in Chaotic Nonlinear Systems: Methods for Time Series with Broadband Fourier Spectra*, Physical Review A, vol. 41, no. 4, s. 1782–1807.
- Araujo, A.E., Marti, J.R., Soudack, A.C., 1993, *Ferroresonance in Power Systems: Chaotic Behaviour*, IEE Proceedings C, vol. 140, no. 3, s. 237–240.
- Baker, G.L., Gollub, J.P., 1998, *Wstęp do dynamiki układów chaotycznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Eckmann, J.P., Kamphorst, S.O., Ruelle, D., 1987, *Recurrence Plots of Dynamical Systems*, Europhysics Letters, vol. 4, no. 9, s. 973–977.
- Eckmann, J.P., Kamphorst, S.O., Ruelle, D., Ciliberto, S., 1986, *Liapunov Exponents from Time Series*, Physical Review A, vol. 34, no. 6, s. 4971–4979.
- Fraser, A.M., Swinney, H.L., 1986, *Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information*, Physical Review A, vol. 33, no. 2, s. 1134–1140.
- Grassberger, P., Procaccia I., 1983, *Characterization of Strange Attractors*, Physical Review Letters, vol. 50, no. 5, s. 346–349.
- Hirsch, M.W., Smale, S., Devaney, R.L., 2004, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, Series: Pure and Applied Mathematics, vol. 60, Academic Press, New York.
- Jankowski, P., 2015, *Selected Aspects of Numerical Solution of Damped Oscillator in Ptc Prime 3.0 Environment*, Proceedings of XXI IMEKO World Congress-Full Papers, Prague, 22-24 September, s. 603–607.
- Kantz, H., 1994, *A Robust Method to Estimate the Maximal Lyapunov Exponent of a Time Series*, Physical Letters A, vol. 185(1), s. 77–87.

- Kantz, H., Schreiber, T., 2004, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kennel, M.B., Brown, R., Abarbanel H.D.I., 1992, *Determining Embedding Dimension for Phase-space Reconstruction using a Geometrical Construction*, Physical Review A, vol. 45, no. 6, s. 3403–3411.
- Małyшко, O., 2016, *Zastosowanie wykładników Lapunowa do badania stabilności sieci elektroenergetycznej*, www.astat.com.pl.
- Marwan, N., Romano, M.C., Thiel, M., Kurths, J., 2007, *Recurrence Plots for the Analysis of Complex Systems*, Physics Reports, vol. 438, no. 5–6, s. 237–329.
- Milnor, J., 1985, *On the Concept of Attractor*, Communications of Mathematical Physics, vol. 99, no. 2, s. 177–195.
- Milos, M., Schreiber, I., 1991, *Chaotic Behaviour of Deterministic Dissipative Systems*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Miśkiewicz-Nawrocka, M., 2012, *Zastosowanie wykładników Lapunowa do analizy ekonomicznych szeregów czasowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- Packard, N.H., Crutchfield, J.P., Farmer, J.D., Shaw, R.S., 1980, *Geometry from a Time Series*, Physical Review Letters, vol. 45, no. 9, s. 712–716.
- Peitgen, H.O., Jürgens, H., Saupe, D., 1996, *Granice chaosu. Fraktale*, cz. 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Peters, E.E., 1997, *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WiG_Press, Warszawa.
- Purczyński, J., 2000, *Wybrane problemy numeryczne stosowania analizy R/S*, Przegląd Statystyczny, XLVII-2, s. 17–21.
- Rosenstein, T., Collins, J.J., De Luca, C.J., 1993, *A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets*, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 65, no. 1, s. 117–134.
- Ruelle, D., 1989, *Chaotic Evolution and Strange Attractors*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Schuster, H.G., *Chaos deterministyczny*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.
- Wolf, A., Swift, J., Swinney, H., Vastano, J., 1985, *Determining Lyapunov Exponents from a Time Series*, Physica D, vol. 16, s. 285–317.
- Wysocki, H., 2012, *Rekonstrukcja atraktora Monarchy Safje na podstawie szeregów czasowych*, Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej w Gdyni, LIII, nr 1(188), s. 149–172.
- Zeug-Żebro, K., 2000, *Badanie wpływu redukcji szumu na identyfikację dynamiki chaotycznej na przykładzie finansowych szeregów czasowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.